

FUNKTION UND GEGENSTAND

James M. Bartlett

1961

FUNKTION UND GEGENSTAND

Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
James Michael Bartlett
Winter-Haven, Florida/USA

Druck: M. Weiß, München

1961

Referent: BRITZELMAYR

Korreferent: STEGMÜLLER

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 7. 1961



Diese Arbeit
ist dem ehemaligen
a. o. Professor der Mathematik
an der Universität Jena

DR. GOTTLOB FREGE

in Ehrfurcht und Bewunderung
zum Gedächtnis
gewidmet.

VORWORT

Diese Arbeit ist eher als ein Beitrag zur Systematik der Logik, denn als einer zur Geschichte der Logik gedacht. Sie soll selber den Nachweis liefern, dass Freges Logik in Bezug auf den systematischen Aufbau noch keineswegs zur überholten Vergangenheit gerechnet werden kann, sondern geradezu massgebend auf diesem Gebiet geblieben ist. Diese Zielsetzung verlangte eine möglichst vollständige Behandlung des Themas - eine Vollständigkeit, die nicht allein aus den veröffentlichten Werken Freges zu erreichen gewesen wäre. Ich bin daher Herrn Professor Dr. Hans Hermes, seinem Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung und der Bibliothek der Universität Münster besonders zu Dank verpflichtet, dass mir die Erlaubnis gegeben wurde, aus den nichtveröffentlichten Schriften des Frege-Nachlasses zu zitieren. Bei dieser Gelegenheit muss auch daran erinnert werden, was die Logik auch diesbezüglich Professor Heinrich Scholz schuldet, dessen unermüdliche Arbeit Freges Schriften vor der heranbrechenden Katastrophe soweit wir nur menschenmöglich gerettet hat. Er, der die Auswertung des Vermächtnisses Freges zugleich ermöglicht und begonnen hat, würde sich bestimmt freuen, dass sein langersehnter Wunsch, die Herausgabe des Frege-Nachlasses, bald in Erfüllung gehen wird, wie ich von Professor Hermes unterrichtet worden bin.

Besonders zu Dank verpflichtet bin ich auch meinem verehrten Lehrer, Professor Dr. Wilhelm Britzelmayr - dem Urheber dieser Arbeit - dessen Verständnis und Rat sie zur Vollendung steuerte.

Ich möchte auch Fräulein A. von Mautner-Markhof und Herrn Dipl.-Ing. Georg Fischöder für ihre opferbereite Hilfe bei der Abfertigung des Manuskriptes danken, sowie auch Herrn Dr. Franz von Kutschera für seine Kritik der fertigen Arbeit.

Letztlich muss ich auch die Opfer und die Geduld erwähnen, welche meine Frau, meine Mutter und meine Schwiegermutter an den Tag legten, um diese Arbeit zu ermöglichen.

München, August 1961

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	1
1. Umriß einiger Lehren Freges	2
1.1 Freges Begriff der Logik	2
1.2 Zwei grundlegende Ansichten	3
1.21 Axiomatische Methode.	3
1.22 Kunstsprachen.	5
1.221 Unzulänglichkeit der Wortsprache	5
1.222 <u>Lingua characteristic</u> a	6
1.3 Semiotik	7
1.31 Pragmatik	8
1.311 Zweidimensionale Schrift.	8
1.312 Urteilsstrich	9
1.32 Semantik	10
1.321 Früher Aufbau der Aussagenlogik	12
1.322 Theorie der Semantik	14
1.3221 Terminologische Festsetzungen	14
1.3222 Sinn von Gegenstandsamen	15
1.3223 Identität	16
1.3224 Wahrheitswert als die Bedeutung von Sätzen	16
1.3225 Semantik der Umgangssprache im Gegensatz zur Semantik einer Kunstsprache	18
1.3226 Sinnesgleichheit von Sätzen	19
1.323 Anforderung der Bedeutungsvollständigkeit	22
1.33 Syntax.	23
1.4 Definitionslehre	25
1.41 Theorie der Definition	25
1.42 Definitionsregeln.	27
2. Begriff der Funktion	30
2.1 Funktion als Grundbegriff	30
2.11 Erläuterung des Funktionsbegriffes	31
2.12 Funktionsbegriff als logischer Begriff	34
2.13 Mehrstellige und mehrstufige Funktionen	37
2.21 Funktionsbegriff aus der Begriffsschrift	39
2.22 Vorgeschichte des Funktionsbegriffes	41
2.221 Habilitationsschrift	41

	Seite
2.222 Anregung von Lotze	41
2.3 Kritik anderer Grundbegriffe	41
2.31 Variablenbegriff	42
2.32 Zuordnungsbegriff	42
2.33 Mengenbegriff	43
2.4 Konventionen zum Beweis der Bedeutungsvollständigkeit	45
2.41 Nachweis der Adäquatheit der Konventionen	47
2.42 Anwendung der Konventionen	49
2.43 Anwendung auf das engere System Freges	51
3. Die Funktion als Gegenstand	53
3.1 Begriff des Wertverlaufes einer Funktion	53
3.11 Erläuterung des Wertverlaufsbegriffes	53
3.12 Zweck der Wertverläufe	55
3.2 Semantik der Funktions- und Wertverlaufsnamen	58
3.21 Problem der irreführenden Sprechweise	60
3.3 Antinomien	64
3.4 Nachweis der Bedeutungsvollständigkeit für das weitere System Freges	68
3.41 Problematik der Erweiterung eines bedeutungsvollständigen Systems	68
3.42 Die Gefahr sich widersprechender bzw. inadäquater Bedeutungsfestsetzungen	70
3.43 Der Fehler in Freges Nachweis	71
3.44 Zusammenfassung	75
Anmerkungen	79
Bibliographie und Abkürzungsverzeichnis	89

Einleitung

Dem deutschen Mathematiker GOTTLOB FREGE (1848 - 1925)¹ verdankt die moderne Logik, wenn nicht ihre Schöpfung, dann mindestens ihre Prägung. Diese Würdigung käme ihm wahrscheinlich alleine dadurch zu, daß er als erster die Aussagenlogik vollständig axiomatisierte, und daß er die Prädikatenlogik erfunden hat; seine Verdienste um die Semiotik, um die Methodologie und um die Philosophie der Logik - ganz abgesehen von denen um die Grundlagen der Arithmetik - stellen eine einzigartige Schöpfungstat dar, obgleich sein Einfluß auf spätere Forscher in diesen Gebieten eher nur mittelbar war.

Zu den wichtigsten Entdeckungen Freges gehört sein Begriff der logischen Funktion, der eine wesentliche Rolle in der Prädikatenlogik spielt. Obwohl kaum irgendein Logiker nach ihm diesen Begriff in genau der Weise übernommen hat, wie Frege ihn ursprünglich entwickelte, machen fast alle Gebrauch von einer daraus gewonnenen Einsicht - die Auffassung des Prädikates als des Satzteil, welcher übrig bleibt, wenn man die Namen eines oder mehrerer Gegenstände wegläßt (so aber, daß die Stellen, wo sie waren, kenntlich bleiben für die Aufnahme anderer Gegenstandsamen).

Diese Absage an die bis dahin traditionelle Kopula brach den engen Rahmen der Syllologistik und führte in der mehrstelligen Prädikatenlogik zu einer weit umfassenderen Logik, als es sie je zuvor gegeben hatte. Die offenkundige Fruchtbarkeit dieser Auffassung verschaffte ihr eine Aufnahme auch da, wo weniger problematische Lehren Freges ignoriert oder abgelehnt wurden.

Als Frege seine Logik systematisch aufbaute, worin der Funktionsbegriff als Urbegriff der Logik eine zentrale Stellung einnahm, erwies sich dieses Vorgehen als nicht ganz ohne Bedenken, obwohl er selber glaubte, die auftauchenden Probleme hinreichend erklären zu können, um seine Auffassung der Funktion zu rechtfertigen. Die Problematik um den Funktionsbegriff ging mit dem Begriff selbst in die moderne Logik hinein, nicht aber ohne durch die Umwandlung in der Auffassung der Funktion selbst etwas umgewandelt zu werden.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, Freges Begriff der Funktion von neuem zu untersuchen.

Diese Untersuchung wird innerhalb von Freges eigener Logik durchgeführt werden; kein Versuch wird gemacht, andere Lehren oder Meinungen aufzuführen, um sie von den Frege'schen abzugrenzen. Wenn es gelingt, so Freges Funktionsbegriff hinreichend zu erklären, daß er als Basis wissenschaftlicher

Diskussion dienen kann, dann kann eine solche Abgrenzung überall gemacht werden, wo das, wovon abgegrenzt wird, auch so genau erklärt ist.

Es wird nur darauf hingezielt, eine solche Basis zu schaffen. Das obige Vorhaben, eine Abgrenzung tatsächlich durchzuführen, wäre in dem Rahmen dieser Arbeit unmöglich mit Vollständigkeit zu erreichen.

Aus dieser Zielsetzung geht hervor, daß eine Erläuterung anderer Thesen aus Freges Logik vorgenommen werden muß, um die Stellung seines Funktionsbegriffs in seiner Logik klar zu machen. Daher wird zuerst ein Umriß einiger seiner Lehren, die zum Verständnis späterer Ausführungen nötig sind, vorausgeschickt.

Wenn es darum ging, Gedanken präzise und bündig auszudrücken, beherrschte Frege die deutsche Sprache - eine an sich zu diesem Zweck hervorragende geeignete Sprache - in meisterhafter Weise, so daß es in dieser Hinsicht seinesgleichen kaum gegeben hat. Wenn es darum geht, seine Gedanken darzustellen, wäre es deswegen eine ziemliche Anmaßung zu glauben, man könnte sie besser ausdrücken als er. Ein solcher Versuch wird hier gar nicht gemacht; obgleich es zu einem außerordentlich hohen Verhältnis von Zitaten zu dem Gesamtumfang der Arbeit kommt, ist es nicht zu vermeiden, ihn in der eigenen Sache zu zitieren. Die Bibliographie im Anhang enthält übrigens die Abkürzungen der Titel seiner Werke, die statt den Titeln selber durch diese Arbeit verwendet werden.

Eine Zeichentabelle wird nicht hinzugefügt, weil die besonderen Bedeutungen, die er mit seinen Zeichen verknüpfte, keine wesentliche Rolle in diesen Ausführungen spielte; am meisten wird nur von der Verschiedenheit der Zeichen untereinander Gebrauch gemacht. Andererseits hätte die strenge Erklärung der Zeichen Voraussetzungen, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

1. Umriß einiger Lehren Freges

1.1 Frege hat sich nur selten ausdrücklich darüber geäußert, was die Logik sei, wendete aber diese sparsam dargelegte Auffassung so konsequent in seinen übrigen Werken an, daß von einer eindeutigen Lehre diesbezüglich gesprochen werden kann: Die Logik ist die Wissenschaft von den logischen Gesetzen; die Aufgabe der Logik ist es, die logischen Gesetze zu erkennen, wobei dieses Erkennen selbstverständlich sowohl die Aufstellung wie auch die Begründung jener Gesetze einschließt. (Ein Gesetz ist für Frege wohlgemerkt nicht ein sprachlicher Ausdruck, sondern der Sinn eines solchen, wie später näher erläutert wird.) Diese sonst kaum ungewöhnli-

che Ansicht erhielt von Frege eine Wendung, die sie von den Lehrmeinungen vieler zeitgenössischer Logiker abgrenzte. Die logischen Gesetze sind nämlich Gesetze des Wahrseins - sie besagen weder primär was wahr sein soll, noch was für wahr gehalten wird, sondern was wahr ist. Wie er unmißverständlich sagte:

Wahrsein ist etwas anderes als für wahr gehalten werden, sei es von einem, sei es von Vielen, sei es von Allen, und ist in keiner Weise darauf zurückzuführen. Es ist kein Widerspruch, daß etwas wahr ist, was von Allen für falsch gehalten wird. Ich verstehe unter logischen Gesetzen nicht psychologische Gesetze des Fürwahrhaltens, sondern Gesetze des Wahrseins. Wenn es wahr ist, daß ich dies am 13. Juli 1893 in meiner Stube schreibe, während draußen der Wind heult, so bleibt es wahr, auch wenn alle Menschen es später für falsch halten sollten. Wenn so das Wahrsein unabhängig davon ist, daß es von irgendeinem anerkannt wird, so sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserem Denken überflutbar zwar, doch nicht verrückbar. Und weil sie das sind, sind sie für unser Denken maßgebend, wenn es die Wahrheit erreichen will. (GGG I, s. XV, XVI).

Diese letzte Behauptung ist der Eckstein einer wichtigen Lehre:

Jedes Gesetz, das besagt, was ist, kann aufgefaßt werden als vorschreibend, es solle im Einklang damit gedacht werden. (GGG I, s. XV).

Darum ist er der Meinung:

Aus den Gesetzen des Wahrseins ergeben sich nun Vorschriften für das Fürwahrhalten, das Denken, Urteilen, Schließen. Und so spricht man wohl von Denkgesetzen. (Ged, s. 58)²

Also bilden weder Schlußregel noch das Schließen den Gegenstand der Logik. Vielmehr ergeben sich die Regeln des Schließens erst aus dem eigentlichen Gegenstand der Logik - den Gesetzen des Wahrseins.

1.2 Zwei grundlegende logische Ansichten Freges zeichnen sich in ihrer Tragweite für seine ganze Lehre von dem Aufbau der Logik vor allen anderen aus; sie dürfen sogar als die Grundpfeiler seiner Lehre angesehen werden. Dabei ist keine der beiden ganz neu bei ihm - die eine stammt von Aristoteles und die andere von Leibniz - doch baute er sie beide fast zur Vollkommenheit aus. Sie sind übrigens auch wesentlich für das Verständnis anderer seiner Lehren und bieten den Schlüssel zu manchen Abweichungen einiger dieser Lehren von den heute geläufigen.

1.21 Die Idee der axiomatischen Methode, die Frege als erster in moderner Strenge formulierte und als erster mit dieser Strenge erfolgreich auf die Logik anwendete, ist für ihn von mehr als methodischer Wichtigkeit. Sie

spielt darüber hinaus eine wesentliche Rolle in seiner Philosophie der Logik. Schon seine klassische Schilderung dieser Methode verrät einen erkenntnistheoretischen Ansatz:

Daß alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber man kann fordern, daß alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muß danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern, indem man alles beweist, was beweisbar ist. Ferner ... verlange ich, daß alle Schluß- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicherzustellen.

Man begnügt sich ja meistens damit, daß jeder Schritt im Beweise als richtig einleuchte, und das darf man auch, wenn man nur von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes überzeugen will. Wenn es sich aber darum handelt, eine Einsicht in die Natur dieses Einleuchtens zu vermitteln, genügt dies Verfahren nicht, sondern man muß alle Zwischenstufen hinschreiben, um das volle Licht des Bewußtseins auf sie fallen zu lassen. Den Mathematikern kommt es ja gewöhnlich nur auf den Inhalt des Satzes an, und daß er bewiesen werde. Hier ist das Neue nicht der Inhalt des Satzes, sondern wie der Beweis geführt wird, auf welche Grundlagen er sich stützt. (GGs I, s. VIII).

Gerade die stillschweigend und ohne klares Bewußtsein gemachten Voraussetzungen verhindern ja die Einsicht in die erkenntnistheoretische Natur eines Gesetzes. (GGs I, s. 1).

In der Bs wurde dieses weitere Ziel der Axiomatik schon früher ziemlich deutlich klargestellt:

Es liegt nahe, die zusammengesetzteren dieser [logischen Gesetze] aus einfacheren abzuleiten, nicht um sie gewisser zu machen, was meistens unnötig wäre, sondern um die Beziehungen der Urteile zueinander hervortreten zu lassen. Es ist offenbar nicht dasselbe, ob man bloß die Gesetze kennt, oder ob man auch weiß, wie die einen durch die anderen schon mitgegeben sind. Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen, wenn man die in den Regeln enthaltenen hinzunimmt, der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. Und auch dies ist ein Nutzen der ableitenden Darstellungsweise, daß sie jenen Kern kennenlernt. Da man bei der unübersehbaren Menge der aufstellbaren Gesetze nicht alle aufzählen kann, so ist Vollständigkeit nicht anders als durch Aufsuchung derer zu erreichen, die der Kraft nach alle in sich schließen. (Bs, s. 25).

Nur an einer Stelle aber findet man die ausdrückliche Formulierung dessen, worauf Frege mit solcher nachdrücklichen Betonung der axiomatischen Methode weiter hinaus will. Diese für seine Lehre wie auch sonst äußerst wichtige These aus der Philosophie der Logik verdiente es, allein ob ihrer außerordentlich sachlich-bündigen Darstellungsweise besonders erwähnt zu werden:

Die Frage nun, warum und mit welchem Rechte wir ein logisches Gesetz als wahr anerkennen, kann die Logik nur dadurch beantworten, daß sie es auf andere logische Gesetze zurückführt. Wo das nicht möglich ist, muß sie die Antwort schuldig bleiben. Aus der Logik heraus-tretend kann man sagen: Wir sind durch unsere Natur und die äußeren Umstände zum Urteilen genötigt, und wenn wir urteilen, können wir dieses Gesetz - der Identität z.B. - nicht verwerfen, wir müssen es anerkennen, wenn wir nicht unser Denken in Verwirrung bringen und zuletzt auf jedes Urteil verzichten wollen. Ich will diese Meinung weder bestreiten noch bestätigen und nur bemerken, daß wir hier keine logische Folgerung haben. Nicht ein Grund des Wahrseins wird angegeben, sondern unseres Fürwahrhaltens. (GG§. I, s. XVII).

Es ist daraus klar, daß Frege Entscheidungsverfahren eher zur Methodologie als zur formalen Logik gerechnet hätte. Die volle Tragweite dieser Behauptungen aber kann man wahrscheinlich an Hand jener These am besten messen, die besagt, daß die Wahrheit logischer Gesetze sich allein kraft ihrer Form, bzw. ihrer Struktur, also aus der Art ihrer Zusammensetzung, ergibt. Nun war Frege auch im gewissen Sinn dieser Meinung; er leitete sogar die Wahrheit der meisten seiner Axiome der Form nach aus den Bedeutungsfestsetzungen für seine Urzeichen ab. Es geht aus den zitierten Stellen allerdings deutlich hervor, daß er damit nicht die Wahrheit seiner Axiome hätte begründen, sondern nur glaubwürdig hätte machen wollen. Er hätte sonst deren Wahrheit nicht nur auf jene Bedeutungsfestsetzungen zurückgeführt, sondern auch auf die Wahrheit derjenigen Gesetze, die der Zurückführung zu Grunde lag. Die Wahrheit der Urgesetze der Logik ist laut ihm logisch nicht zu begründen: Versuchte man von ihrer Form oder sonst wie auf ihre Wahrheit zu schließen, dann drehte man sich im Kreise. Aber gerade deswegen ist die axiomatische Methode für Frege nicht nur zweckmäßig, sondern durchaus wesentlich für die Logik.³

1.22 Freges Lehre von der Verwendung von Kunstsprachen in der Logik ist gewissermaßen eine Konsequenz seiner strengen Lehre von der axiomatischen Methode. Daraus stellt er die Inadäquatheit der Wortsprache für die Logik fest und daraus ergeben sich zum Teil seine Anforderungen an eine logische Kunstsprache.

1.221 Frege war entschieden der Meinung, daß die Wortsprache ein unzulängliches Ausdrucksmittel für die Logik sei;

Die Sprache aber erweist sich als mangelhaft, wenn es sich darum handelt, das Denken vor Fehlern zu bewahren. Sie genügt schon der ersten Anforderung nicht, die man in dieser Hinsicht an sie stellen muß, der, eindeutig zu sein, (wBBs, s. 50).

In der Ungenauigkeit der Wortsprache aber sah er nicht den Hauptgrund ihrer logischen Unvollkommenheit. Er erhob einen tieferliegenden Einwand,

der in enger Beziehung zu seiner Anforderung der Strenge steht:

Der Grund, weshalb die Wortsprachen zu diesem Zweck wenig geeignet sind, liegt nicht nur in der vorkommenden Vieldeutigkeit der Ausdrücke, sondern vor allem in dem Mangel fester Formen für das Schließen. Wörter wie "also", "folglich", "weil" deuten zwar darauf hin, daß geschlossen wird, sagen aber nichts über das Gesetz, nach dem geschlossen wird, und können ohne Sprachfehler auch gebraucht werden, wo gar kein logisch gerechtfertigter Schluß vorliegt. (BsPeano, s. 362, 363).

Oder wie er es an anderer Stelle ausdrückt:

Die Sprache ist nicht in der Weise durch logische Gesetze beherrscht, daß die Befolgung der Grammatik schon die formale Richtigkeit der Gedankenbewegung verbürgte. Die Formen, in denen das Folgern ausgedrückt wird, sind so vielfältige, so lose und dehnbare, daß sich leicht Voraussetzungen un bemerkt durchschleichen können, die dann bei der Aufzählung der notwendigen Bedingungen für die Gültigkeit des Schlußsatzes übergangen werden. (wBBs, s. 50).

Nun läßt sich dieser Einwand nach seiner Ansicht in der Wortsprache nicht aufheben:

Ein streng abgegrenzter Kreis von Formen des Schließens ist in der Sprache eben nicht vorhanden, so daß ein lückenloser Vorgang an der sprachlichen Form von einem Überspringen von Zwischengliedern nicht zu unterscheiden ist. Man kann sogar sagen, daß erster in der Sprache nicht vorkommt, daß er dem Sprachgefühl widerstrebt, weil er mit einer unerträglichen Weitschweifigkeit verbunden wäre. (wBBs, s. 51).

Wenn also innerhalb Freges Philosophie der Logik die Verwendung einer Kunstsprache nicht ganz die systematische Erheblichkeit erreicht, welche er der axiomatischen Methode zuweist, bleibt sie immerhin für ihn ein dringendes Gebot der Zweckmäßigkeit.

1.222 Nachdem er festgestellt hat:

So genügt auch die Wortsprache nicht. Wir bedürfen eines Ganzen von Zeichen, aus dem jede Vieldeutigkeit verbannt ist, dessen strenger logischer Form der Inhalt nicht entschlüpfen kann. (wBBs, s. 52).

griff Frege bei der Verwirklichung dieser Aufgabe auf einen alten Leibnizschen Gedanken, die Idee der lingua characteristica, eine Schrift, deren Zusammensetzung die verschiedenen Zusammensetzungen der Begriffe direkt abbilde, zurück. Dabei unterschied Frege, wenn etwas willkürlich, so doch sehr scharf zwischen den Anforderungen der lingua characteristica und Leibnizens eigentlichem Ansatz, jene Anforderung zu erfüllen - seinem calculus ratiocinator. Diese Unterscheidung tritt auf bei dem Vergleich

seiner Begriffsschrift mit der Logik Georg Booles, die er für einen bloßen calculus ratiocinator hielt:

Boole wollte, wenn ich ihn recht verstehe, eine Technik ausbilden, durch welche logische Aufgaben in systematischer Weise gelöst werden können, ähnlich wie die Algebra eine Technik der Elimination und der Berechnung von Unbekannten lehrt. Zu diesem Zwecke stellt er die Urteile in Form von Gleichungen dar, die er aus Buchstaben und arithmetischen Zeichen, wie +, 0, 1 aufbaut. Die logischen Gesetze nehmen dann die Form eines Algorithmus an, der jedoch nur teilweise mit dem für dieselben Zeichen gültigen der Arithmetik zusammenfällt. Vom Inhalte wird dabei ganz abgesehen. (BrLBs, s. 6).

Die Erläuterung dieses Unterschiedes verdient besonderes Interesse, weil sie auf einer primitiven Unterscheidung zwischen logische und deskriptiven Zeichen fußt, (eine Unterscheidung übrigens, die Frege später ausdrücklich formuliert hat, um darauf eine wichtige logische Lehre zu begründen)⁴.

Die lingua characteristica nämlich, wenn sie auch zunächst auf das Logische beschränkt bleibt, muß so gestaltet sein, daß sie der Aufnahme deskriptiver Zeichen aus nichtlogischen Gebieten fähig ist.

Der Grund dieser Unfähigkeit der wissenschaftlichen Begriffsbildung zu folgen, liegt (bei der arithmetischen Formelsprache) in dem Mangel eines der beiden Teile, aus denen jede ausgebildete Sprache bestehen muß. Man kann nämlich den formalen Teil, der in den Wortsprachen aus Endungen, Prae- und Suffixen und Formwörtern besteht, von dem eigentlich inhaltlichen unterscheiden. Die Zeichen der Arithmetik entsprechen dem letzteren. Was noch fehlt, das ist der logische Mörtel, durch den diese Bausteine fest miteinander verbunden werden können. Diesen vertrat bisher die Wortsprache und konnte daher nicht nur in den für die strenge Schlußfolge unwesentlichen Teilen, die nur die Auffassung des Zusammenhanges erleichtern sollen, sondern auch im Beweis selbst nicht entbehrt werden. Boole's symbolische Logik dagegen stellt nur den formalen Teil der Sprache und auch diesen nicht vollständig dar... Es ergibt sich hieraus die Aufgabe, Zeichen für die logischen Beziehungen aufzustellen, die geeignet sind, mit der mathematischen Formelsprache zu verschmelzen und so eine für ein gewisses Gebiet wenigstens vollständige Begriffsschrift zu bilden. (BrLBs, s. 6, 7)⁵

Also soll die Begriffsschrift sowohl ein calculus ratiocinator wie auch eine lingua characteristica sein. Damit ist Freges Ziel zum größten Teil vorgezeichnet: er strebt ein streng axiomatisches System der Logik an, darstellt in einer Weise, die ihre Anwendung in anderen Gebieten am besten fördert.

1.3 In dem Bestreben seine logische Schrift und mithin seine Logik möglichst gründlich aufzubauen, kam Frege dazu, eine Reihe von Überlegungen über das ganze Gebiet der allgemeinen Zeichenlehre anzustellen. Die

bewundernswerten Ergebnisse dieser Bemühungen machten ihn zum Urheber, bzw. Vorläufer der gewaltigen Fortschritte, welche die moderne Logik in den verschiedenen Zweigen der Semiotik errungen hat. Dabei blieben ihm Zeichen immer nur Mittel zum Zweck.

1.31 Frege beschäftigte sich mehr als die meisten Logiker mit den pragmatischen Aspekten einer logischen Schrift. Daraus ergaben sich zwei Lehren, die nicht viel Anklang und noch weniger Verständnis fanden, obwohl sie geradezu Merkmale seiner Begriffsschrift sind: die zweidimensionale Schrift und die Verwendung eines besonderen Urteilszeichens.

1.311 Das Zweidimensionale war für Frege neben der Unvergänglichkeit der Hauptvorteil der Schrift gegenüber der gesprochenen Sprache:

Die Lagenverhältnisse der Schriftzeichen auf der zweifach ausgedehnten Schreibfläche können in weit mannigfacherer Weise zum Ausdruck innerer Beziehungen verwendet werden als das bloße Folgen und Vorhergehen in der einfach ausgedehnten Zeit, und dies erleichtert die Auffindung dessen, worauf wir unsere Aufmerksamkeit gerade richten wollen. In der Tat entspricht ja auch die einfache Reihung in keiner Weise der Mannigfaltigkeit der logischen Beziehung, durch welche die Gedanken untereinander verknüpft sind. (wBBs, s. 53).

Er verteidigte seine Ansicht sowohl E. Schröder gegenüber:

Aber diesem Vorwurfe (Der Raumverschwendung) liegt die Meinung zu Grunde, meine Begriffsschrift solle eine Darstellung der abstrakten Logik sein. Jene Formeln sind nur leere Schemata. Bei der Anwendung hat man an der Stelle von **A** und **B** sich ganze Formeln, vielleicht ausgedehnte Gleichungen, Kongruenzen, Projektivitäten zu denken - dann sieht die Sache ganz anders aus.... Die Begriffsschrift nutzt die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche aus, indem sie die beurteilbaren Inhalte von oben nach unten aufeinander folgen läßt, während jeder von diesen sich von links nach rechts ausdehnt; so werden die einzelnen Inhalte voneinander deutlich getrennt und doch in ihrer logischen Beziehung leicht übersehbar.... Mit dem eben Gesagten hängt eine andere Bemerkung Schröders zusammen, meine Formelsprache huldige der japanischen Sitte einer Vertikalschrift. Dies sieht in der Tat so aus, so lange man nur die abstrakten logischen Formen darstellt. Wenn man aber für die einzelnen Buchstaben ganze Formeln, etwa arithmetische Gleichungen gesetzt denkt, so erkennt man, daß nichts Ungewöhnliches hier vorliegt; denn in jeder arithmetischen Ableitung pflegt man die einzelnen Gleichungen nicht nebeneinander zu schreiben, sondern der Übersichtlichkeit halber von oben nach unten aufeinander folgen zu lassen. (ZweckBs., s. 7,8).

als auch Peano gegenüber:

Durch die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche wird eine Mannigfaltigkeit von Stellungen der Schriftzeichen zueinander

möglich, und das kam für die Zwecke des Gedankenausdrucks benutzt werden. Bei einem gewöhnlich geschrieben oder gedruckten Texte ist es freilich ganz zufällig, welche Schriftzeichen untereinander zu stehen kommen; dagegen benutzt man bei tabellarischen Zusammenstellungen die zweifache Ausdehnung, um Übersichtlichkeit zu erzielen. In ähnlicher Weise versuche ich das in meiner Begriffsschrift zu tun. Indem ich die einzelnen Teilsätze - z. B. Folgesätze und Bedingungssätze - untereinander schreibe und links davon durch eine Verbindung von Strichen die logischen Beziehungen bezeichne, durch die das Ganze zusammengehalten wird, erreiche ich eine durchsichtige Gliederung des Satzes. Ich erwähne dies, weil jetzt Bestrebungen hervortreten, jede Formel in eine Zeile zu pressen. In der Peano'schen Begriffsschrift wird die Einzeiligkeit der Formeln, wie es scheint, grundsätzlich durchgeführt, was mir wie ein mutwilliger Verzicht auf einen Hauptvorzug des Geschriebenen vor dem Gesprochenen vorkommt. Die Bequemlichkeit des Setzers ist denn doch der Güter höchstes nicht. Aus physiologischen Gründen ist eine lange Zeile schwerer zu übersehen und ihre Gliederungen schwerer aufzufassen als kürzere, untereinander stehende Zeilen, die aus der Brechung jener entstanden sind, falls diese Teilung der Gliederung des Sinnes entspricht. (BsPeano, s. 364)⁶.

Also zusammenfassend kann man von Freges Schrift sagen, sie stellt das Aus-sagelogische von unten nach oben, das Prädikatenlogische von links nach rechts. Er hätte sich hier übrigens zu seiner Rechtfertigung auch auf die Anwendungen der Syllologistik berufen können, wo diese Praxis genausogut eingebürgert ist, wie in der von ihm erwähnten Mathematik.

1.312 Von alledem, womit Frege die moderne Logik bereichert hat, ist ein einziges Zeichen mit seinem Namen verbunden geblieben. Dieses Zeichen wird jedoch kaum je zu demselben Zweck verwendet, wofür er das Zeichen ursprünglich geschaffen hat. Das sogenannte "FREGE-ZEICHEN" (" $\vdash$ "), von ihm selber Urteilsstrich genannt, wurde eingeführt, um den Unterschied zwischen einem Gedanken und der Anerkennung seiner Wahrheit sichtbar machen zu können. Er hielt diese Unterscheidung für notwendig:

Man muß die Möglichkeit haben einen Gedanken auszudrücken, ohne seine Wahrheit zu behaupten. Wenn man einen Gedanken als falsch hinstellen will, muß man ihn zunächst ohne Behauptung ausdrücken, ihn dann verneinen und den so erhaltenen Gedanken als wahr behaupten. Man kann eine hypothetische Gedankenverbindung gar nicht richtig ausdrücken, wenn man Gedanken nur ausdrücken kann, indem man sie zugleich behauptet, denn in der hypothetischen Verbindung wird weder der als Bedingung, noch der als Folge auftretende Gedanke behauptet. (BwJBem., s. 5).

Hieraus ergibt sich seine Auffassung vom Urteilen: Urteilen ist die Wahrheit eines Gedankens anerkennen, ein Urteil ist die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens, dies allerdings als ein Akt:

Den Sprachgebrauch des Lebens trifft man wohl am besten, wenn man unter einem Urteile eine Tat des Urteilens versteht, wie ein Sprung eine Tat des Springens ist. (Ver, s. 151).

Andere Auffassungen lehnte er als irreführend ab:

Damit verbindet sich ein... Fehler, nämlich die Meinung, der Urteilende stifte durch sein Urteilen den Zusammenhang, die Ordnung der Teile und bringe dadurch das Urteil zu Stande. Dabei ist das Fassen eines Gedankens und die Anerkennung seiner Wahrheit nicht auseinandergehalten. In vielen Fällen freilich folgen diese Taten so unmittelbar aufeinander, daß sie in eine Tat zusammenzuschmelzen scheinen, aber nicht in allen. Jahre mühevoller Untersuchungen können zwischen dem Fassen des Gedankens und der Anerkennung seiner Wahrheit liegen. Daß durch dieses Urteilen der Gedanke, der Zusammenhang seiner Teile nicht gestiftet werde, ist offenbar; denn er bestand schon vorher. (Ver, s. 151).

Wenn das Urteil eine Tat ist, so geschieht es zu einer gewissen Zeit und gehört nachher der Vergangenheit an. Zu einer Tat gehört auch ein Täter, und man kennt die Tat nicht vollständig, wenn man den Täter nicht kennt. Dann kann man von einem synthetischen Urteile in dem üblichen Sinne nicht sprechen. Wenn man dieses, daß durch zwei Punkte nur eine gerade Linie geht, ein synthetisches Urteil nennt, so versteht man unter "Urteil" nicht eine Tat, die von einem bestimmten Menschen zu einer bestimmten Zeit getan worden ist, sondern etwas, was zeitlos wahr ist, auch dann, wenn sein Wahrsein von keinem Menschen anerkannt wird. Wenn man solches eine Wahrheit nennt, kann man statt "synthetisches Urteil" vielleicht besser "synthetische Wahrheit" sagen. Zieht man trotzdem den Ausdruck "synthetisches Urteil" vor, so muß man dabei von dem Sinne des Verbums "Urteilen" absehen. (Ver, s. 151).

Also wurde Freges Urteilstrich zu dem einen Zweck ersonnen, genau kenntlich zu machen, wo geurteilt wird. Nichts wurde dabei über die Begründung des Urteils mitgemeint. Die weitverbreitete Meinung, ein solches Zeichen erübrige sich, beruht, wenn nicht auf einer Verwischung des erläuterten Unterschiedes, dann wohl auf der stillschweigenden Annahme einer Reihe von Konventionen in Bezug auf die relative Entfernung von Zeichen voneinander

1.32 Das tragische Schicksal Freges, ein so hohes logisches Niveau erreicht zu haben, daß er nicht mehr verstanden wurde, wird an nichts so sehr verdeutlicht, als am Beispiel seiner semantischen Arbeit, die zu seiner Zeit gar nicht verstanden wurde und die auch heute noch nicht voll anerkannt wird. Wer hätte z.B. im Jahre 1893 - Wittgenstein war damals erst vier Jahre alt - großes Verständnis für solche Behauptungen aufbringen können, wie etwa:

Jeder solcher Name eines Wahrheitswertes drückt einen Sinn, einen Gedanken aus. Durch unsere Festsetzungen ist nämlich bestimmt, unter welchen Bedingungen er das Wahre bedeutet. Der Sinn dieses Namens, der Gedanke ist der, daß diese Bedingungen erfüllt sind. (GGS I, s. 50).

Dabei entsprangen seine Bemühungen in der Semantik einer sehr deutlichen und konsequenten Einstellung zur Umgangssprache:

Es kann nicht die Aufgabe der Logik sein, der Sprache nachzugehen und zu ermitteln, was in den sprachlichen Ausdrücken liege. Jemand, der aus der Sprache Logik lernen will, ist wie ein Erwachsener, der von einem Kinde denken lernen will. Als die Menschen die Sprache bildeten, befanden sie sich in einem Zustand des kindlichen, bildhaften Denkens. Die Sprachen sind nicht nach dem logischen Lineale gemacht. Auch das Logische in der Sprache erscheint unter Bildern versteckt, die nicht immer zutreffen... Die Hauptaufgabe des Logikers besteht in einer Befreiung von der Sprache und in einer Vereinfachung. Die Logik soll Richter sein über die Sprachen. (BwHusserl, I. XI. 1906).

Was er hiermit wollte, wird deutlicher werden, wenn man sieht, worum es u. a. dabei ging:

Bedenken habe ich ferner bei folgendem: Sie schreiben: "Die Form mit "Alle" wird normalerweise so verstanden, daß die Existenz von Gegenständen, die unter den terminalen Begriffen stehen, mitgemeint und als zugestanden vorausgesetzt ist"... Ich gebrauche nun die Wendung mit "Alle" so, daß ich die Existenz weder mitmeine, noch als zugestanden voraussetze. Der Sprachgebrauch kann hierbei ja nicht unbedingt entscheiden, weil wir uns nicht damit zu beschäftigen haben, was Sprachgebrauch ist. Vielmehr können wir in der Logik nach logischen Bedürfnissen unseren Sprachgebrauch festsetzen. Der Grund für meine Festsetzung ist die Einfachheit. Es ist unzulässig eine Ausdrucksform, wie die mit "Alle", die man als Grundform in der logischen Betrachtung verwenden will, so zu gebrauchen, daß damit zwei unterscheidbare Gedanken zugleich ausgedrückt werden in einem Satz, der nicht aus zwei durch "und" verbundene Sätze besteht. Man muß ja immer danach streben auf die Elemente, auf das Einfache, zurückzugreifen. Es muß möglich sein, den Hauptgedanken auch ohne den Nebengedanken auszudrücken. Deshalb will ich also den Nebengedanken der Existenz nicht mitmeinen, wenn ich die Wendung mit "Alle" gebrauche. (BwHusserl, 9. XII. 1906)⁷.

Es ist aber auch mit solchen Beispielen nicht möglich, ein Gesamtbild von dem semantischen Niveau Freges Arbeit zu vermitteln, ein viel zu großes Unternehmen für diese Stelle überhaupt, wo nur Platz ist, um diejenigen semantischen Lehren zu erläutern, welche für den Zweck dieser Arbeit wesentlich sind. Dazu wird nur eine Ausnahme gemacht, um einen kurzen, schon längst fälligen Einblick in die großartige Systematik zu geben, mit der er um das Jahr

1880 an den Aufbau der Aussagenlogik heranging.

1.321 Frege war von Anfang an mit den Ergebnissen der Logiker aus der Boole'schen Richtung gut vertraut und baute sein eigenes System in wohlüberlegtem Gegensatz zu ihnen. Er ging mit einer rigorosen Gründlichkeit an diese Aufgabe:

Ich befolgte den Grundsatz, möglichst wenig als ursprünglich einzuführen, nicht aus Scheu vor neuen Zeichen - dann hätte ich wie Boole alte mit neuen Bedeutungen versehen - sondern weil die Übersicht über den wissenschaftlichen Besitzstand erschwert wird, wenn dasselbe in verschiedenen Verkleidungen auftritt, und das scheint mir der einzig zu billigende Grund zu sein, aus dem man neuen Bezeichnungen widerstreben darf. Dies hindert nicht, daß man für eine oft vorkommende, sehr zusammengesetzte Zeichenverbindung nachträglich eine einfachere einführt. Die von diesen geltenden Sätze stelle man dann aber nicht als ursprünglich hin, sondern leite sie aus der Bedeutung ab. Je mehr Urzeichen eingeführt werden, desto mehr Urgesetze werden auch gefordert. Es ist aber ein allgemeiner Grundsatz der Wissenschaft, deren Zahl möglichst zu verringern. (BrLBs, s. 31)⁸.

Er gab zugleich ein Kriterium, wonach man zu den geeignetsten Urelementen kommen kann:

Im Allgemeinen wird immer das Zeichen die mannigfachste Anwendung zulassen und die übersichtlichsten Ausdrücke ergeben, welches den einfachsten Inhalt hat. (BrLBs, s. 32).

Dabei ist "einfach" so zu verstehen:

Wenn von zwei Bezeichnungen die eine Alles, was die andere bedeutet, auch besagt, während diese nicht den ganzen Sinn der ersten enthält, so nenne ich die Bedeutung der zweiten einfacher als die der ersteren, weil sie weniger Inhalt hat. (BIFBs, s. 3).

Wie das dann in der Praxis angewendet wird, zeigen die folgenden Zitate:

Wenn es sich darum handelt, zwei beurteilbare Inhalte A und B in Beziehung zu setzen, hat man folgende Fälle ins Auge zu fassen:

A und B
 A und nicht B
nicht A und B
nicht A und nicht B

Diese Fälle können wieder entweder bejaht oder verneint werden... Wendet man diesen Maßstab (der Einfachheit) an, so sieht man, daß eine möglichst einfache Beziehung von zwei beurteilbaren Inhalten A und A durch Verneinung eines der vier Fälle

A und B
 A und nicht B
nicht A und B
nicht A und nicht B

gewonnen werde; denn die Verneinung zweier von diesen Fällen sagt mehr als die eines einzigen und die Verneinung dreier noch mehr; sie ist gleichbedeutend mit der Bejahung des vierten. Von den BOOLE'schen Zeichen entspricht keines der Forderung der größten Einfachheit der Bedeutung. (BIFBs, s. 1, 3)⁹.

Wenn man die eben an den BOOLE'schen Zeichen hervorgehobenen Mängel vermeiden will, muß man eine eigene Bezeichnung für die Verneinung eines der vier oben aufgezählten Fälle einführen. Es genügt zu diesem Zwecke, einen einzigen jener Fälle auszuwählen; denn mittels eines Verneinungszeichens kann man aus jedem der vier Fälle jeden anderen herstellen. Wenn man z. B. für die Verneinung *A* den Buchstaben *┐* setzt, so lauten jene vier Fälle jetzt

nicht *┐* und *B*
 nicht *┐* und nicht *B*
┐ und *B*
┐ und nicht *B*

d. h. der erste Fall hat die Form des dritten, der zweite die des vierten und umgekehrt der dritte die des ersten, der vierte die des zweiten angenommen. (BIFBs, s. 5).

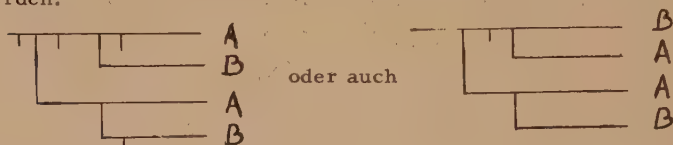
Um nun eine möglichst einfache Bedeutung für ein Zeichen zu erhalten, das zwei beurteilbare Inhalte verbinden soll, konnte ich unter vieren, in dieser Hinsicht gleichberechtigten Möglichkeiten wählen: ich konnte jede Verneinung eines der vier oben aufgeführten Fälle als solche Bedeutung annehmen. Eine aber genügte, weil man durch Verneinungen von und jeden der vier Fälle in jeden anderen verwandeln kann. Es sind, um ein chemisches Gleichnis zu gebrauchen, nur allotrope Zustände desselben Elementes: Ich wählte die Verneinung des dritten Falles wegen des leichten Überganges zum Schließen und wegen der nahen Verwandtschaft dieses Inhaltes zu dem wichtigen Verhältnis von Grund und Folge. (BrLBs, s. 33)¹⁰.

Betrachten wir nun die Verbindungen von Bedingungs- und Verneinungsstrich an folgender Zusammenstellung:

- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und <i>B</i> " wird verneint. | 5) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und <i>B</i> " wird bejaht: <i>B</i> und nicht <i>A</i> |
| 2) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und <i>B</i> " wird verneint: <i>A</i> und <i>B</i> schließen einander aus. | 6) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und <i>B</i> " wird bejaht: <i>A</i> und <i>B</i> |
| 3) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und nicht <i>B</i> " wird verneint: <i>A</i> oder <i>B</i> | 7) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und nicht <i>B</i> " wird bejaht: weder <i>A</i> noch <i>B</i> |
| 4) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und nicht <i>B</i> " wird verneint. | 8) $\begin{array}{l} \text{┐} A \\ \text{┐} B \end{array}$ Der Fall "nicht <i>A</i> und nicht <i>B</i> " wird bejaht: <i>A</i> und nicht <i>B</i> |

Wenn wir an den Inhaltsstrichen der links stehenden Ausdrücke den Verneinungsstrich anbringen, so erhalten wir die rechts daneben stehenden. Der links verneinte Fall wird rechts immer bejaht. Der zweite Ausdruck entsteht aus dem ersten dadurch, daß

an die Stelle von A das verneinte A tritt. In den Wortausdrücken heben sich dann die beiden Verneinungen von A auf. Der dritte Ausdruck geht aus dem ersten und der vierte aus dem zweiten dadurch hervor, daß B in das verneinte B verwandelt wird. Das "oder" im dritten Fall ist das nicht ausschließende. Das ausschließende "oder" kann so ausgedrückt werden:



(ZweckBs, s. 6-7).

1.322 Daß Frege eine allgemeine Theorie der Semantik vertrat, ist heute überall bekannt. Auch einige Einzelheiten aus dieser Theorie sind ebenfalls bekannt. Dennoch trifft man kaum eine genaue Kenntnis seiner Begründung dieser Theorie, noch seltener ein vollständiges, geschweige denn richtiges Verständnis aller ihrer Einzelheiten. Am meisten mißverstanden dürfte seine Semantik der Funktionsnamen (also Prädikatsnamen) sein, (die übrigens im SuB gar nicht, in seinen übrigen veröffentlichten Werken kaum behandelt wurde), weil sie unzertrennbar mit seinem Funktionsbegriff verbunden ist und deshalb ohne Verständnis dieses selber nicht zu verstehen wäre. (Aus diesem Grunde wird ihre Erklärung erst später bei der Erörterung des Funktionsbegriffes aufgenommen werden.) Da der Rest seiner Theorie mit seiner Begründung in dem Aufsatz SuB überall vorhanden ist, braucht er hier nicht wiederholt zu werden - auf gründliches Studium dieses Urtextes der modernen Semantik wird hingewiesen. Statt dessen werden hier gewisse Ergänzungen zu dieser Theorie, gestützt vor allem auf unveröffentlichte Schriften, zu dem Zweck vorgebracht, einige inzwischen aufgetauchten Irrtümer in Bezug auf seine Theorie zu beseitigen.

1.3221 Ein Punkt muß von vorneherein klar gestellt werden, daß es sich bei Freges semantischer Terminologie fast durchwegs um Festsetzungen handelt. Dies ist aber deswegen wichtig, weil viele Leute an seiner Theorie aus dem Grunde Anstoß genommen haben, daß sein Wortgebrauch nicht mit dem üblichen übereinstimme, während er im allgemeinen so etwas gar nicht bezweckte, wie es für einige strittige Fälle aus den folgenden Zitaten unmißverständlich abzulesen ist:

Aus dem Zusammenhang geht hervor, daß ich hier unter "Zeichen" und "Namen" irgendeine Bezeichnung verstanden habe, die einen Eigennamen vertritt, deren Bedeutung also ein bestimmter Gegenstand ist (dies Wort im weitesten Umfang genommen)... Die Bezeichnung eines einzelnen Gegenstandes kann auch aus mehreren Worten oder sonstigen Zeichen bestehen. Der Kürze wegen mag jede solche Bezeichnung Eigennamen genannt werden. (SuB, s. 27).

Um einen kurzen und genauen Ausdruck möglich zu machen, mögen folgende Redewendungen festgesetzt werden: Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinen Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung. (SuB, s. 31).

Ich verstehe unter Gedanken nicht das subjektive Tun des Denkens, sondern dessen objektiven Inhalt, der fähig ist, gemeinsames Eigentum von Vielen zu sein. (SuB, Fußnote, s. 32).

Ich verstehe unter dem Wahrheitswerte eines Satzes den Umstand, daß er wahr oder daß er falsch ist. Weitere Wahrheitswerte gibt es nicht. Ich nenne der Kürze halber den einen das Wahre, den anderen das Falsche. (SuB, s. 34).

1.3222 Die Weise, wie Frege zu seiner Theorie kam und mithin die Begründung dieser Lehre, ist oft mißverstanden worden, obwohl diese eindeutig aus SuB, insbesondere aus dem ersten Paragraphen, hervorgeht. Wenn man die Identität als eine Relation auf Grund von Namen und nicht eine Relation zwischen zwei von diesen Namen verschiedenen Gegenstände auffaßt, wie Frege das tat, dann muß man erklären können, wieso eine Identität wie $a = a$ von einer Identität wie $a = b$ einen wesentlich verschiedenen Erkenntniswert haben, denn dies wäre nicht der Fall, wenn die Identität nicht mehr besagt, als bloß, daß zwei verschiedene Namen zur Bezeichnung desselben Gegenstandes verwendet werden:

Damit würde dann ein Satz $a = b$ nicht mehr die Sache selbst, sondern nur noch unsere Bezeichnungsweise betreffen; wir würden keine eigentliche Erkenntnis darin ausdrücken... Wenn sich das Zeichen "a" von dem Zeichen "b" nur als Gegenstand (hier durch die Gestalt) unterscheidet, nicht als Zeichen; das soll heißen: nicht in der Weise, wie es etwas bezeichnet; so würde der Erkenntniswert von $a = a$ wesentlich gleich dem von $a = b$ sein, falls $a = b$ wahr ist. Eine Verschiedenheit kann nur dadurch zustande kommen, daß der Unterschied des Zeichens einem Unterschiede in der Art des Gegenseins des Bezeichneten entspricht... Es liegt nun nahe mit einem Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen) außer dem Bezeichnetem, was die Bedeutung des Zeichens heißen möge, noch das verbunden zu denken, was ich den Sinn des Zeichens nennen möchte, worin die Art des Gegebenenseins enthalten ist. (SuB, s. 26)¹¹.

Damit ist die Meinung hinreichend widerlegt, daß Frege nicht angegeben hat,

was der Sinn eines Gegenstandsnamens sein soll, und zugleich ist eine Antwort auf den Einwand gegeben, daß die Annahme, daß Namen einen Sinn haben, eine unnötige Vermehrung des "Entitätenuniversums" hieße - über die Art wie ein Gegenstand gegeben wird, müßte man auch sonst reden können, auch dann, wenn diese nicht der Sinn des Gegenstandsnamens wäre.

1.3223 Das Leibnizsche Prinzip der identitas indiscernibilium, welches Frage sich zu eigen machte, gibt Anlaß zu vielen Mißverständnissen, wie etwa folgendem:

Auf Seite 140 der zitierten Schrift [GGS II] stellt Herr Frege den Satz auf, "Der Morgenstern ist derselbe wieder Abendstern" und scheint die beiden für identisch zu erklären. Hat nun der Abendstern dieselbe Masse wie der Morgenstern? Nein. Hat er dieselbe innere Energie (thermische, chemische usw.)? Nein. Hat er dieselbe Bewegungsrichtung? Nein. Dieselben Beleuchtungsverhältnisse? Nein.¹²

Da dieser Einwand ab und zu immer wieder auftaucht, wird es wohl nicht überflüssig sein, Freges Antwort darauf zu zitieren:

Wir sind wohl darüber einig, daß die Zeitbestimmung zum Prädikate gehört, daß ein Gegenstand zu einer Zeit eine Eigenschaft haben kann, die er zu einer anderen nicht hat. Ein Mensch kann zu einer Zeit keine Kenntnis des Einmaleins haben, zu einer anderen kann er es kennen. Doch ist er derselbe, dazu bedarf es keiner Abstraktion. (AFThomae, s. 588-89).

1.3224 Eine These ist für Freges semantische Theorie von überaus großer Wichtigkeit, obwohl sie nirgends in voller Allgemeinheit ausgesagt wird, nämlich daß die Bedeutung eines zusammengesetzten Ausdruckes allein aus den Bedeutungen seiner Teile hervorgeht. Mit dieser These eng verbunden und aus ihr folgend ist die These, daß jeder Ausdruck, der aus einem gegebenen Ausdruck dadurch hervorgeht, daß man einen Teil dieses Ausdruckes mit einem Ausdruck von der gleichen Bedeutung ersetzt, die gleiche Bedeutung wie der ursprüngliche Ausdruck hat. Höchstwahrscheinlich war er der Meinung, daß diese Thesen überall gelten, wo immer Zeichen bedeutungsvoll verwendet werden.

Nicht nur sind sie Voraussetzungen zu seiner Auffassung der ungeraden Rede, sie sind auch wesentlich für seinen Beweis, daß die Wahrheitswerte die Bedeutungen von Sätzen sind. Da mancherorts die Meinung herrscht, dies Letzte würde von Frege bloß behauptet und nicht begründet, dürfte es angebracht sein, seinen einfachen Beweisgang hier zu skizzieren: Wenn Sätze überhaupt Bedeutungen haben, dann muß die Bedeutung eines Satzes unverändert bleiben, wenn einer seiner Teile durch einen anderen Ausdruck von derselben Bedeutung ersetzt wird; ferner muß diese Bedeutung von solcher

Art sein, daß, wenn der Satz selber Teil eines anderen Ausdruckes ist, die Bedeutung dieses Ausdruckes dasselbe bleibt, wenn der Satz durch einen anderen Satz von der gleichen Bedeutung ersetzt wird (vorausgesetzt, daß es sich dabei um einen echten Satz handelt und ausgenommen die ungerade Rede). Selbstverständlich müssen dann sowohl wahre wie auch falsche Sätze Bedeutungen haben. Nun ist ja mit jedem Satz ein Gedanke (eine Proposition) verbunden. Dieser aber scheidet als Bedeutung des Satzes aus, weil er geändert wird, wenn ein Teil des Satzes durch einen Ausdruck von derselben Bedeutung, aber verschiedenem Sinn, ersetzt wird. (Deshalb wird der Gedanke als Sinn des Satzes angesehen.)

Nun frage ich: Hat der ganze Satz nur einen Sinn oder hat er auch eine Bedeutung? Das, wovon wir sprechen, sind die Bedeutungen der Wörter. Wir sagen etwas von der Bedeutung des Wortes "Sirius", wenn wir sagen: "Sirius ist größer als die Sonne". Darum ist es uns in der Wissenschaft von Wert zu wissen, daß die gebrauchten Wörter eine Bedeutung haben. Ob z. B. der Name "Odysseus" eine Bedeutung habe (oder wie man gewöhnlich sagt, ob Odysseus eine geschichtliche Person sei) kümmert uns nicht, wenn wir bloß die Dichtung genießen wollen. Erst wenn wir uns wissenschaftlich verhalten, gewinnt die Frage für uns Interesse in demselben Augenblick, wenn wir fragen: "Ist die Geschichte wahr?", d. h. wenn uns der Wahrheitswert interessiert... Nun wäre es nicht einzusehen, warum es uns von Wert wäre zu wissen, ob ein Wort eine Bedeutung hätte, wenn der ganze Satz keine Bedeutung hätte, und wenn diese Bedeutung nicht von Wert für uns wäre; denn auf den Gedanken hat das keinen Einfluß. Und diese Bedeutung wird etwas sein, was gerade dann Wert für uns hat, wenn uns interessiert, ob die Worte bedeutungsvoll sind; also wenn wir nach der Wahrheit fragen. Die Bedeutung des Satzes muß etwas sein, was sich nicht ändert, wenn wir ein Zeichen durch ein anderes ersetzen, das dieselbe Bedeutung, aber verschiedenen Sinn hat. Was sich dabei nicht ändert, ist der Wahrheitswert. (BwRussell, 28. XII. 1902).

Den Nachweis, daß der Wahrheitswert eines komplexen Satzes sich nicht ändert, wenn ein Teil von ihm, der auch ein echter Satz ist, ersetzt wird durch irgendeinen Satz von dem gleichen Wahrheitswert, macht den größeren Teil von SuB aus, weil er seine Durchführung von der Unterscheidung der ungeraden Rede von der geraden Rede abhängt. Frege faßt dies so zusammen:

Der Nebensatz hat meistens als Sinn keinen Gedanken, sondern nur einen Teil eines solchen und folglich als Bedeutung keinen Wahrheitswert. Dies hat entweder darin seinen Grund, daß im Nebensatz die Wörter ihre ungerade Bedeutung haben, so daß die Bedeutung, nicht der Sinn des Nebensatzes ein Gedanke ist, oder darin, daß der Nebensatz wegen eines darin nur unbestimmt andeutenden Bestandteils unvollständig ist, so daß er erst mit dem Hauptsatze zusammen einen Gedanken ausdrückt. Es kommen aber Fälle vor, wo der Sinn des

Nebensatzes ein vollständiger Gedanke ist, und dann kann er unbeschadet der Wahrheit des ganzen, durch einen anderen von demselben Wahrheitswerte ersetzt werden, soweit nicht grammatische Hindernisse vorliegen. (SuB, s. 46).

Neben bzw. zu dem Beweis gehört auch die folgende wichtige Feststellung:

Aber hier scheint doch eine Unstimmigkeit offenbar zu werden. Wenn ich sage "Der Gedanke, daß (16-2) ein vielfaches von 7 ist, ist wahr", fasse ich wahr auf als eine Eigenschaft des Gedankens, während sich uns doch ergeben hatte, daß der Gedanke der Sinn, und das Wahre die Bedeutung des Satzes ist. Zwar entspricht die Auffassung der Wahrheit als Eigenschaft von Sätzen oder von Gedanken dem sprachlichen Ausdrucke. Wenn wir sagen: "Der Satz '3 2 ist wahr, so sagen wir der sprachlichen Form nach von dem Satz etwas aus, daß er nämlich eine gewisse Eigenschaft habe, die wir mit dem Worte "wahr" bezeichnen. Und wenn wir sagen, "der Gedanke, daß 3 2 ist, ist wahr", so gilt das Entsprechende von dem Gedanken. Aber das Prädikat wahr ist doch ganz verschieden von den anderen Prädikaten, wie etwa grün, salzig, rational, denn was wir mit dem Satze "Der Gedanke, daß 3 : 2 ist, ist wahr" sagen wollen, können wir einfacher mit dem Satze "3 ist größer als 2" sagen. Wir brauchen also hierzu das Wort "wahr" gar nicht. Und wir erkennen, daß durch dieses Prädikat dem Sinne eigentlich gar nichts hinzugefügt wird. Um etwas als wahr hinzustellen, brauchen wir kein besonderes Prädikat, sondern nur die behauptende Kraft, mit der wir den Satz aussprechen. (ÜLM, s. 42).

Es war Frege übrigens nicht entgangen, daß dieser Beweis nur zeigt, daß die Wahrheitswerte als die Bedeutungen von Sätzen aufgefaßt werden können (und nicht, daß sie es müssen) - nur sah er keine andere Möglichkeit:

Was sonst als der Wahrheitswert könnte auch gefunden werden, das ganz allgemein zu jedem Satz gehört, bei dem überhaupt die Bedeutung der Bestandteile in Betracht kommt, was bei einer Ersetzung der angegebenen Art unverändert bleibt ? (SuB, s. 35).

1.3225 Es darf nicht übersehen werden, daß Freges Ausführungen in SuB eine semantische Analyse der gewöhnlichen Wortsprache bilden, und zwar dieser Sprache, wie sie tatsächlich verwendet wird. Ohne dies im Auge zu behalten, kann man unmöglich zwischen dem, was Frege für eine semantische Lehre behauptet, und dem, was er für eine Eigentümlichkeit der Umgangssprache hält, unterscheiden. Es ist z.B. eine Lehre, daß, wo immer Zeichen verwendet werden, sie als Zeichen für etwas verwendet werden, nämlich für ihre Bedeutung; das ist es, was einen Laut bzw. eine geschriebene Figur überhaupt erst zum Zeichen macht, daß es kraft Absicht und Konvention etwas bezeichnet. Es ist aber eine Eigentümlichkeit und zugleich ein logischer Mangel der Umgangssprache, daß in ihr ein und dasselbe Zeichen systematisch für drei verschiedene Bedeutungen verwendet wird: sei-

ne gewöhnliche Bedeutung, seine Bedeutung bei der ungeraden Rede (was sein Sinn ist bei der gewöhnlichen Bedeutung) und seine Bedeutung in materieller Supposition (sich selbst). Selbstverständlich darf nach Frege eine solche Mehrdeutigkeit in einer logischen Sprache nicht vorkommen. Das Problem, wie dann die ungerade Rede in einer solchen logischen Sprache zu behandeln wäre, hat er aus einem einfachen Grund nie aufgegriffen:

Ich habe in der Begriffsschrift die ungerade Rede noch nicht eingeführt, weil ich noch keine Veranlassung dazu hatte.
(BwRussell, 20. X. 1902).

Wie er wahrscheinlich an dieses Problem herangegangen wäre, deutete er aber in einem späteren Brief an:

Eigentlich müßte man ja, um Zweideutigkeit zu vermeiden, in ungerader Rede besondere Zeichen haben, deren Zusammenhang aber mit dem entsprechenden in gerader Rede leicht erkennbar wäre. (BwRussell, 28. XII. 1902).

(Die Durchführung dieses Vorschlages wird allerdings etwas problematisch im Falle der in demselben Brief erwähnten ungeraden Rede höheren Grades.) Jedenfalls darf man Frege nicht den Vorwurf machen, seine semantische Theorie führe notwendig zu mehrdeutigen Zeichen, nur weil nach der Interpretation dieser Theorie die Zeichen der Umgangssprache tatsächlich mehrdeutig verwendet werden.

1.3226 Frege hat sich nie in einer veröffentlichten Schrift über die Frage geäußert, wann zwei Sätze denselben Gedanken ausdrücken, d. h. wann sie sinnesgleich sind. Dies könnte falscherweise den Eindruck erwecken, er sei sich nicht im Klaren darüber gewesen bzw. hätte die Frage für unwichtig gehalten, während er in der Tat eine präzise Antwort darauf gegeben hat - mindestens für eine Klasse von Sätzen - deren Begründung in Bezug auf spätere Kontroversen über diesen Punkt aufschlußreich ist:

Es scheint mir ein objektives Kriterium notwendig zu sein, um einen Gedanken als denselben wiederzuerkennen, weil ohne ein solches eine logische Analyse nicht möglich ist. Um nun zu entscheiden ob der Satz A denselben Gedanken ausdrücke wie der Satz B, scheint mir folgendes Mittel allein möglich zu sein, wobei ich annehme, daß keiner der beiden Sätze einen logisch evidenten Sinnbestandteil enthalte. Wenn nämlich sowohl die Annahme, daß der Inhalt von A falsch und der von B wahr sei, als auch die Annahme, daß der Inhalt von A wahr und der von B falsch sei, auf einen logischen Widerspruch führt, ohne daß man zu dessen Feststellung zu wissen braucht, ob der Inhalt von A oder B falsch sei, und ohne daß man dazu anderer als rein logischer Gesetze bedarf, so kann zum Inhalte von A, soweit er fähig ist, als wahr oder falsch beurteilt zu werden, nichts gehören, was

nicht auch zum Inhalte von B gehörte; denn für einen solchen Überschuß fehlte es an jeder Begründung im Inhalte von B, und der Voraussetzung nach, wäre ein solcher Überschuß auch nicht logisch evident. Ebenso kann bei unserer Annahme zum Inhalte von B, soweit er fähig ist, als wahr oder falsch beurteilt zu werden, nichts gehören, was nicht auch zum Inhalte von A gehörte. Was also an den Inhalten von A oder B als wahr oder falsch beurteilbar ist, stimmt überein und dies nenne ich den von A ebenso wie von B ausgedrückten Gedanken. Zum Inhalte von A kann man freilich mancherlei rechnen, z. B. eine Stimmung, Gefühle, Vorstellungen; aber alles dies wird nicht als wahr oder falsch beurteilt; es geht die Logik im Grunde nichts an, ebenso wenig wie das die Ethik angeht, was nicht fähig ist, als sittlich gut oder schlecht beurteilt zu werden. (BwHusserl, 9. XII. 1906).

Zusammenfassend kann gesagt werden: zwei Sätze sind sinnesgleich, wenn sie zwar logisch-äquivalent sind, aber weder sie noch irgendwelche Teile von ihnen logisch determiniert sind. Dieser letzte Zusatz ist insofern wichtig, als ohne ihn behauptet werden könnte, erstens, daß alle logisch wahren, bzw. alle logisch-falschen Sätze den gleichen Sinn hätten und zweitens, daß dieser Sinn dann eben keiner wäre, denn die Hinzufügung eines logisch-determinierten Satzes in irgendeiner Weise zu einem beliebigen Satz den Sinn dieses Satzes nicht ändern würde, solange er dessen Wahrheitswert nicht ändere. Wann dann logisch-determinierte Sätze sinnesgleich sind, wird dadurch nicht beantwortet. Für einen vielleicht trivialen Fall liegt aber auch hier eine klare Antwort bei Frege vor in Bezug auf Definitionen:

Wir führen durch eine Definition einen neuen Namen ein, indem wir bestimmen, daß er denselben Sinn und dieselbe Bedeutung haben solle wie ein aus bekannten Zeichen zusammengesetzter. (GGs I, s. 44, 45).

Nachdem nun durch eine Definition einem Zeichen eine Bedeutung gegeben worden ist, hat es nunmehr diese; und die Definition geht in einen Satz über, in dem eine Identität behauptet wird. Freilich enthält er nur eine Tautologie, die unsere Erkenntnis nicht erweitert. Er enthält eine Wahrheit, die so selbstverständlich ist, daß sie inhaltsleer erscheint; und doch wird sie im Aufbau des Systems scheinbar als Prämisse gebraucht. Ich sage scheinbar; denn was sich dabei in der Form eines Schlusses darstellt, bringt keine neue Erkenntnis zustande, sondern bewirkt im Grunde nur eine Änderung des Ausdruckes, auf die man verzichten könnte, wenn nicht eben die Vereinfachung des Ausdruckes wünschenswert erschiene. Wenn in einem Satz der erklärende Ausdruck vorkommt und wir ersetzen ihn durch das "erklärte" Zeichen, so ändert sich im Gedanken gar nichts. Wir erhalten dann zwar einen anderen Satz, aber nicht einen anderen Gedanken. (ÜLM, s. 8, 9).

Nun das ist ja nicht viel, nur ein besonderer Fall davon, daß alle Sätze, die sich nur durch Bestandteile unterscheiden, die sinnesgleich sind, selber sinnesgleich sind. Wie liegt die Sache sonst? Eine eindeutige Aussage da-

rüber hat Frege nicht gemacht, jedoch läßt sich seine Absicht leicht nachkonstruieren. Er hat z. B. wohl einmal behauptet, daß wenn "A" ein beliebiger Satz sei, also auch ein logisch-determinierter Satz bzw. einer mit logisch-determinierten Bestandteilen, dann sowohl "A und A" wie auch "A oder A" mit "A" sinnesgleich sind. Wenn aber ein solcher Satz "A" keine logisch-determinierten Bestandteile enthalten sollte und auch nicht logisch-determiniert wäre, dann wären die genannten Sätze auch nach der allgemeinen Festsetzung Freges sinnesgleich. Darüber hinaus folgt aus jener Festsetzung, daß, wenn zwei Sätze nach ihr sinnesgleich sind, dann so auch alle Satzpaare, die aus den zweien dadurch hervorgehen, daß man die in ihnen vorkommenden deskriptiven Zeichen durch andere deskriptive Zeichen derselben syntaktischen Kategorie ersetzt. Nun liegt die Vermutung nahe, daß man, wenn man in einem solchen sinnesgleichen Satzpaare die in ihnen vorkommenden deskriptiven Zeichen durch logische Zeichen derselben syntaktischen Kategorie ersetzen würde, zwei logische Sätze erhalten würde, die Frege auch für sinnesgleich gehalten hätte. Ein solcher Tatbestand ließe sich genau beschreiben - sogar auch auf die Sinnesgleichheit von Zeichen schlechthin (nicht nur von Sätzen) verallgemeinern, da die Identität bei Frege die Äquivalenz miteinschließt: zu diesem Zweck muß nur festgesetzt werden, daß eine Gleichung ein Ausdruck sein soll, dessen Hauptfunktionszeichen "=" ist (besteht also nur aus einem Ausdruck gefolgt von "=" gefolgt von einem Ausdruck), und daß eine Allgemeinheit, die sich über einen ganzen Satz erstreckt, mittels Buchstaben allein (also ohne Quantoren) angedeutet werden soll, wobei von einer allgemeinen Gleichung nur dann gesprochen werden soll, wenn die Buchstaben zur Andeutung der Allgemeinheit sowohl links als auch rechts von den Identitätszeichen vorkommen. Dann kann man sagen:

Wenn der Ausdruck eines logischen Gesetzes eine allgemeine Gleichung solcher Art ist, daß kein Bestandteil dieses Ausdrucks (insbesondere nicht die gesamten Teilausdrücke links und rechts von den Identitätszeichen) noch die Negation eines solchen der Ausdruck eines logischen Gesetzes ist, dann ist jeder Ausdruck, der aus dem gesamten Teilausdruck links vom Identitätszeichen durch rechtmäßige Einsetzung hervorgeht, mit demjenigen Ausdruck sinnesgleich, der durch dieselbe Einsetzung aus den gesamten Teilausdrücken rechts vom Identitätszeichen hervorgeht.

Daß diese Festsetzung diejenigen Sätze, die durch Freges Festsetzung bzw. durch die vermutlich seine Absicht treffende Erweiterung seiner Festsetzung

für sinnesgleich erklärt worden sind, wieder für sinnesgleich erklärt, und sonst keine anderen Sätze so beschreibt, dürfte, wenn auch nicht unmittelbar, einleuchten. Es ist zu bemerken, daß hier nichts über die Sinnesgleichheit von solchen Satzbestandteilen gesagt wird, die nicht Namen von Gegenständen sind, denn Prädikate sind in Freges System unvollständige Ausdrücke und dürfen deswegen nicht vereinzelt an einer Argumentstelle der Identitätszeichen vorkommen. Es ist ferner beachtenswert, daß danach, wenn zwei Klassennamen aus logischen Gründen dieselbe Klasse bezeichnen, dies keineswegs heißt, daß diese Namen sinnesgleich sind - genau wie man es z.B. bei den Zahlen auch erwarten würde. Daß $4 + 1 = 5$, ist zwar eine analytische Wahrheit, doch ist der Sinn von " $4 + 1$ " verschieden von dem Sinne von " 5 "; auf der anderen Seite gilt auch analytisch, daß $4 + 1 = 1 + 4$, da aber allgemein für jedes a und b gilt, daß $a + b = b + a$, ist $4 + 1$ der Festsetzung nach mit " $1 + 4$ " sinnesgleich.

Es darf übrigens gegen eine solche Festsetzung nicht eingewendet werden, daß die für sinnesgleich erklärten Ausdrücke nicht salva veritate füreinander ersetzt werden können, wenn es sich um die Argumentsstellen von Prädikaten des Fürwahrhaltens handelt (das sind Prädikate des Glaubens, Behauptens, Zweifeln, Für-notwendig-haltens und dergleichen). Da kein Mensch gezwungen ist, etwas für wahr zu halten, nicht einmal das logisch Wahre, wird es kaum möglich sein, allgemein gültige logische Regeln für die Ersetzung in solchen Kontexten aufzustellen.

1.323 Frege stellte eine semantische Forderung auf, die sogar über das hinausgeht, was heute in der Logik üblich ist; er forderte nämlich den Nachweis, daß alle rechtmäßig gebildeten Ausdrücke eines Systems eine Bedeutung haben. Dies ist eine wesentlich schwächere Forderung als die offenbar verwandte Forderung des Beweises der Existenz eines Entscheidungsverfahrens - hinreichend schwächer, daß man sie für jedes logische System ohne Bedenken aufstellen kann. Frege hielt sie für unentbehrlich:

Nachdem man so bis ans Ende gelangt ist, möge man die Darlegung der Begriffsschrift noch einmal im Zusammenhang und vollständig lesen und sich dabei vor Augen halten, daß die Festsetzungen, die später nicht gebraucht werden und darum unnötig erscheinen, zur Durchführung des Grundsatzes dienen, daß alle rechtmäßig gebildeten Zeichen etwas bedeuten sollen, eines Grundsatzes, der für die volle Strenge wesentlich ist. (GGs I, s. XII).

Diese Behauptung braucht eigentlich keine weitere Rechtfertigung - die Logik hört einfach dort auf, wo bedeutungslose Zeichen auftreten, da die Geltung der logischen Gesetze auf die Verwendung von (im logischen Sinne) be-

deutungsvollen Zeichen beruht. Dies gilt nicht minder für die Umgangssprache denn für eine formalisierte Logik: es ist Voraussetzung zu jedem Beweis, daß die zu dem Beweis verwendeten Zeichen eine Bedeutung haben, und zwar so, daß die logischen Gesetze ihre Geltung behalten (wohlgemerkt ist es Voraussetzung und nicht Prämisse - ist die Voraussetzung nicht erfüllt, dann liegt überhaupt kein Beweis vor, sondern nur der Schein eines solchen.)

Es muß hier zu betont werden, daß semantische Regeln, die bestimmten Zeichen eine Bedeutung verleihen, nicht notwendigerweise damit auch Zusammensetzungen aus diesen Zeichen eine Bedeutung geben, es sei denn, daß die Bedeutung des zusammengesetzten Ausdruckes aus den Bedeutungen seiner einfachen Teile und der Art ihrer Zusammensetzung mit Notwendigkeit hervorgehe. Daß Letzteres der Fall ist, ist immer eines Beweises bedürftig, weil es gar keine Selbstverständlichkeit ist. Auch die stillschweigenden Bedeutungskonventionen der Umgangssprache müssen so geartet sein, daß die Bedeutung komplexer Ausdrücke eine Funktion der Bedeutungen ihrer Teile ist.

Nun wäre die Aufstellung einer solchen Anforderung billig, wenn ihre Erfüllung nirgends - oder überall - möglich wäre. Das ist offenbar hier nicht der Fall. Das Beispiel von Freges System zeigt, daß die Grenzen der Durchführbarkeit eines solchen Nachweises von ganz beachtlichem Erkenntniswert sind: er glaubte selber den Beweis für sein ganzes System der GGG geführt zu haben, jedoch sein Beweis ist an einer kritischen Stelle fehlerhaft. Da es aber zu einem solchen Nachweis gehört, anzugeben, wann ein Zeichen bedeutungsvoll ist, und da die diesbezügliche Angabe, die Frege für sein System machte, eng mit einem Funktionsbegriff verbunden ist, wird erst an späterer Stelle näher darauf eingegangen.

1.33 Mit dem Aufbau einer reinen Syntax befaßte sich Frege nicht, noch ist es zu erwarten, daß er diese für sehr gewinnbringend angesehen hätte. Auf der anderen Seite baute er sein System der GGG syntaktisch fast einwandfrei auf, so daß seine Strenge in dieser Beziehung erst viel später überhaupt angestrebt wurde. Ferner stellte er in seiner Kritik an den damaligen formalen, also rein syntaktischen Theorien der Arithmetik als erster eine Reihe von wichtigen syntaktischen Lehren auf - vor allem die Lehre von der prinzipiellen Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Metatheorie und Kalkül.¹³ Eine Einsicht in seine Haltung in Bezug auf ungedeutete Systeme und zugleich einen Blick auf das syntaktische Niveau seines eigenen Systems liefert folgende Ausführung:

Nun ist es ja ganz richtig, daß wir unsere Regeln des Schließens und die anderen Gesetze der Begriffsschrift auch hätten einführen können als willkürliche Festsetzungen, ohne irgend von der Bedeutung und dem Sinne der Zeichen zu sprechen. Die Zeichen würden dann eben als Figuren behandelt. Was uns als äußere Darstellung eines Schlusses galt, wäre dann einem Zug des Schachspieles vergleichbar, nur der Übergang von einer Figurenstellung zu einer anderen, ohne daß dem ein Übergang von einem Gedanken zum einem anderen entspräche. Man könnte jemanden unsere Formeln I bis VI und die Definitionen A bis H des ersten Bandes als Ausgangspunkte geben - vergleichbar der Grundstellung der Schachfiguren - die Regeln sagen, nach denen er Umformungen vornehmen dürfte, und nun die Aufgabe stellen, unseren Satz (71) des ersten Bandes von jenen Ausgangspunkten aus zu erreichen; alles dies, ohne daß er eine Ahnung vom Sinn und Bedeutung dieser Zeichen hätte, noch von den Gedanken, deren Ausdruck die Formeln sind. Es wäre sogar denkbar, daß diese Aufgabe ebenso gelöst würde, wie wir es getan haben. Daß dabei geistige Arbeit geleistet würde, versteht sich von selbst, ebenso wie bei einer ähnlichen Aufgabe des Schachspiels, von einer Grundstellung aus zu einer gegebenen Endstellung gemäß den Regeln des Spieles zu gelangen, wobei von Gedanken, die durch die verschiedenen Stellungen ausgedrückt würden, keine Rede wäre, und kein Zug als Schluß gedeutet werden könnte. Obwohl also geistige Arbeit geleistet würde, fehlte doch ganz der Gedankengang, der bei uns die Sache begleitet und ihr eigentlich erst Interesse verliehen hat. Möglich mag es sein, aber kaum vorteilhaft; dürfte die Aufgabe doch durch Abwehr der Gedankenbegleitung nicht leichter sondern bedeutend schwerer geworden sein. (GGSII, s. 99).

Er bestreitet also von vornherein, daß es bei der Verwendung eines Kalküls vorteilhaft ist, von den Bedeutungen der Zeichen abzusehen. Darüber hinaus warf er dem rein syntaktischen Vorgehen einen schweren Mangel vor, nämlich, daß man sich so davon entbinde, Rechenschaft zu geben, warum die Regeln des Kalküls so und nicht anders aufgestellt werden. Für Frege aber liegt der Erkenntniswert eines jeden solchen Systems in seiner Anwendbarkeit, die kein Zufall, sondern eben das Ergebnis der Bedeutung der Zeichen ist. Die Syntax allein ist nicht imstande, zwischen Wissenschaft und Spiel zu unterscheiden:

Dazu ist es nötig, daß die Formeln einen Sinn ausdrücken, und daß die Regeln in den Bedeutungen der Zeichen ihre Begründung finden. Als Ziel muß die Erkenntnis dastehen und dadurch muß alles bestimmt werden, was geschieht. (GGSII, s. 101).

Die tiefste Kluft aber zwischen der Meinung Freges und der der Formalisten und der eigentliche Grund seiner endgültigen Ablehnung ihrer Theorie lag in seiner konsequenten Verwerfung jeder implicite oder explicite gemachten Annahme, daß es mehr als endlich viele von Menschenhand geschaffene Gegenstände gibt oder je geben wird. Für ihn war die Menge der Zeichen endlich und dies bildet eine Schranke, über die der Formalismus nicht springen darf.

1.4 Obwohl die Definitionslehre gewöhnlich zur Methodologie gerechnet wird, ist sie für die formale Logik insofern von Wichtigkeit, als diese Wissenschaft, die die Grundlage jener Lehre bildet, den Geboten des Definierens auch unterworfen ist. Frege entwickelte eine systematisch aufgebaute Definitionslehre, deren Grundsätze er mit großer Konsequenz in seinem eigenen System befolgte, und deren Mißachtung er mit großer Vehemenz den Mathematikern seiner Zeit vorwarf. Die Lehre ist von einer einmaligen Strenge, so daß sie nicht nur jenen Mathematikern, sondern auch manchen Logikern recht unsympathisch vorkommen dürfte. Dabei ist diese Lehre nicht unbegründet: sie läßt sich aus der Logik rechtfertigen. Die Hauptanforderung z. B.

Ehe ein Wort oder Zeichen seiner Bedeutung nach nicht vollständig erklärt oder sonst bekannt ist, darf es in einer strengen Wissenschaft nicht gebraucht werden. (GS II, s. 70).

erhält seine Berechtigung aus der Tatsache, daß die logischen Gesetze nur für scharf begrenzte Begriffe gelten:

Solche begriffsartigen Bildungen (denen eine scharfe Abgrenzung fehlt) kann die Logik nicht als Begriffe anerkennen; es ist unmöglich von ihnen genaue Gesetze aufzustellen. Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ist ja eigentlich nur in anderer Form die Forderung, daß der Begriff scharf begrenzt sei. Ein beliebiger Gegenstand fällt entweder unter den Begriff oder er fällt nicht unter ihn; tertium non datur. (GS II, s. 69)¹⁴.

Hierbei ist die scharfe Begrenzung folgendermaßen zu verstehen:

Es darf also keinen Gegenstand geben, für den es nach der Definition zweifelhaft bliebe, ob er unter den Begriff fiele, wenn es auch für uns Menschen bei unserem mangelhaften Wissen nicht immer möglich sein mag, die Frage zu entscheiden. (GS II, s. 69).

1.41 Eine systematische Definitionslehre aber kann nicht an der Tatsache vorbeigehen, daß nicht alles definiert werden kann. An diesem Punkt fängt der Aufbau von Freges Lehre an:

Die Gefahr, ins Unendliche weiter definieren zu müssen, tritt nur dann und immer dann ein, wenn man verlangt, daß alles definiert werden müsse; aber wer zwingt dazu ? ...

Meine Meinung ist diese. Wir müssen logische Urelemente anerkennen, die nicht definierbar sind. Auch hierbei stellt sich das Bedürfnis ein, sicher zu stellen, daß man mit demselben Zeichen (Worte) dasselbe bezeichnet. Wenn sich die Forscher über diese Urelemente und ihre Beziehungen verständigt haben, ist das Einverständnis über das logisch Zusammengesetzte durch Definition leicht erreichbar. Da bei den Urelementen diese nicht möglich sind, muß hier etwas anderes eintreten; ich nenne es Erläuterung. Diese dient also den Zwecken der Verständigung der Forscher untereinander und der Mitteilung der Wissenschaft. Man kann sie einer Propädeutik zuweisen. Im System der Wissenschaft hat sie keine Stelle; in diesem wird kein Schluß auf sie gegründet. Jemand, der nur für sich forschte, brauchte sie nicht. Der Zweck der Erläuterungen ist ein praktischer, und wenn dieser erreicht ist, muß man mit ihm zufrieden sein. Dabei muß auf etwas guten Willen, auf entgegenkommendes Verständnis, auf Erraten gerechnet werden können; denn ohne eine Bildlichkeit des Ausdruckes wird oft nicht auszukommen sein. Aber von dem Urheber einer Erläuterung kann man immerhin verlangen, daß er selbst bestimmt wisse, was er meine, daß er mit sich selbst im Einklange bleibe und daß er, wenn sich die Möglichkeit eines Mißverstehens auch bei gutem Willen ergibt, bereit sei, seine Erläuterung zu vervollständigen und zu verbessern. (UGG2, I, s. 300, 301).

Freilich kann man auch dabei nur wieder Wörter gebrauchen, die vielleicht ähnliche Mängel zeigen, wie die sind, denen die Erläuterung abhelfen sollte. So scheinen denn wieder neue Erläuterungen nötig zu werden. Theoretisch betrachtet kommt man so eigentlich nie ans Ziel; praktisch gelingt es doch, sich über die Bedeutungen der Wörter zu verständigen. (ÜLM, s.7).

Wenden wir uns den eigentlichen Definitionen zu! ... Sie setzen natürlich die Kenntnis gewisser Urelemente und ihrer Zeichen voraus. Aus solchen Zeichen setzt die Definition eine Gruppe von Zeichen rechtmäßig zusammen, so daß die Bedeutung dieser Gruppe durch die Bedeutungen der benutzten Zeichen bestimmt ist. Rein theoretisch angesehen könnte dies genügen; aber solche Zeichengruppen werden oft zu unhandlich, zu zeitraubend auszusprechen oder hinzuschreiben. Man bedarf für sie eines einfachen Zeichens. Und dieses neue Zeichen dem durch die bekannten Zeichen bestimmten Inhalte beizulegen, ist die Aufgabe der Definition. Nun kann es vorkommen, daß dies Zeichen (Wort) nicht durchaus neu ist, sondern in der Sprache des Lebens oder einer der eigentlich systematischen vorhergehenden wissenschaftlichen Behandlung schon gebraucht worden ist. In der Regel ist dieser Sprachgebrauch für die strenge Wissenschaft zu schwach. Aber nehmen wir einmal an, er genüge in einem gegebenen Fall den strengsten Anforderungen so könnte man denken, daß dann eine Definition unnötig wäre. Und wenn die Definition gleich der Erläuterung nur der gegenseitigen Verständigung und der Mitteilung der Wissenschaft dienen sollte, so wäre sie in diesem Falle in der Tat überflüssig; aber jenes ist nur ein beiläufig gewonnener Vorteil. Die eigentliche Bedeutsamkeit der Definition liegt in dem logischen Aufbau aus den Urelementen. Und deshalb würde man auf sie in einem solchen Falle nicht verzichten. Die Einsicht in

den logischen Bau, die sie gewährt, ist nicht nur an sich wertvoll, sondern auch Bedingung für die Einsicht in die logische Verkettenung der Wahrheiten. Die Definition ist ein Bestandteil des Systems der Wissenschaft. Sobald die in ihr getroffene Festsetzung angenommen ist, wird das erklärte Zeichen ein bekanntes und geht der erklärende Satz in einen behauptenden über. Die in diesem enthaltene selbstverständliche Wahrheit wird nun im System als Prämisse von Schlüssen auftreten.

Die geistigen Tätigkeiten, die zur Aufstellung einer Definition führen, können doppelter Art sein; zerlegend oder aufbauend, ähnlich der Tätigkeit des Chemikers, der entweder einen gegebenen Stoff in seine Elemente zerlegt, oder gegebene Elemente sich zu einem neuen Stoff verbinden läßt. In beiden Fällen erfährt man die Zusammensetzung eines Stoffes. So kann man auch hier durch logischen Aufbau etwas neues gewinnen und für dieses ein Zeichen festsetzen. Aber die geistige Arbeit, die der Aufstellung einer Definition vorhergeht, erscheint nicht im systematischen Aufbau... sondern nur ihr Ergebnis: die Definition. Und so ist es für das System... auch einerlei, ob diese vorausgehende Tätigkeit zerlegend oder aufbauender Art war, ob das zu definierende schon vorher irgendwie gegeben war, oder ob es neu gewonnen wurde.

Denn im System erscheint kein Zeichen (Wort) vor der Definition, die es eingeführt. So ist für das System jede Definition eine Namengebung, einerlei auf welchem Wege man zu ihr gelangt ist. (UGG2 I, s. 302, 303).

Also sind Definitionen für Frege reine Festsetzungen, gleichgültig, ob das definierte Zeichen schon vorher im Gebrauch war oder nicht. Wenn bei einer "Definition" nicht willkürlich festgesetzt wird, dann liegt eine Synonymitätsbehauptung vor; und da Synonymitätsbehauptungen nicht bewiesen werden können, müßten sie zu Axiomen erhoben werden: dies aber hielt Frege für unangebracht in der Wissenschaft. Er fand es irreführend, solche Behauptungen überhaupt "Definition" zu nennen. Die ganze Tätigkeit des zerlegenden "Definierens" war für ihn nur eine Propädeutik zur Aufstellung von echten Definitionen, von Festsetzungen. Die Frage, ob ein schon längst bekanntes Zeichen bei dem strengen Aufbau der Wissenschaft überhaupt wieder aufgenommen werden sollte, ist eine reine Zweckmäßigskeitsfrage: auf jeden Fall hat das Zeichen im System nur die durch Definition verliehene Bedeutung.

1.42 Da es Zweck einer Definition ist, durch Festsetzung einem bisher unbekannten einfachen Zeichen die Bedeutung eines schon bekannten, komplexen Zeichens zu verleihen, ist die Erreichung dieses Zieles nur durch das Einhalten von drei Grundregeln zu garantieren:

- 1) Definiens und Definiendum müssen von derselben syntaktischen Kategorie sein.

- 2) Das Definiens muß ein aus schon bekannten Zeichen rechtmäßig zusammengesetztes Zeichen sein. (In einem strengen System heißt "schon bekanntes Zeichen" eben Urzeichen oder aus Urzeichen und schon rechtmäßig definierten Zeichen gebildetes Zeichen.)
- 3) Das Definiendum muß ein einfaches, bisher unbekanntes Zeichen sein.¹⁵

Nun äußert sich die ganze Härte von Freges Definitionslehre darin, daß er keine Abweichung von diesen drei Regeln dulden wollte; insbesondere bekämpfte er das stückweise (wiederholte) Definieren, bedingte Definitionen, Kontextdefinitionen und sogenannte implicite Definitionen als unzulässige Verstöße gegen die Regeln. Sein oberster Grund dafür lautet:

Es ist aber daran festzuhalten, daß in der Definition nichts behauptet, sondern etwas festgesetzt wird. Es darf also nie etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder sonst einer Begründung seiner Wahrheit bedarf. (BwHilbert, 27. XII. 99).

Es ist überhaupt eine solche Weise des Definierens zu verwerfen, bei welcher die Rechtmäßigkeit einer Definition von einem vorher zu führenden Beweis abhängig wird; denn dadurch wird es außerordentlich erschwert, die Strenge der Beweisführung nachzuprüfen, weil dann bei jeder Definition eine Untersuchung nötig ist, ob von ihrer Aufstellung irgendwelche Sätze zu beweisen seien; eine Untersuchung, die dann doch fast immer unterbleibt. Eine solche Lücke wird eben fast nie gefüllt und ist dadurch für die Strenge besonders gefährlich. Es genügt eben... nicht, irgendeine Behauptung aufzustellen, ohne Beweis oder mit einem Scheinbeweis und nur abzuwarten, ob es jemandem gelingt, ihre Falschheit nachzuweisen, sondern umgekehrt muß verlangt werden, daß jede nicht ganz selbstverständliche Behauptung wirklich bewiesen werde, und dazu gehört, daß die dabei gebrauchten Ausdrücke oder Zeichen einwandfrei eingeführt seien, sofern sie nicht als allgemein bekannt angesehen werden dürfen. (GGs II, s. 73).

Daß die genannten von Frege bekämpften Definitionsarten sämtlich solcher Beweise bedürfen, braucht kaum nachgewiesen zu werden: Bei mehrfachen Definitionen desselben Zeichens (ein Fall übrigens, der immer dann eintritt, wenn ein schon bekanntes Zeichen in einem Definiendum vorkommt) muß der Beweis erbracht werden, daß die verschiedenen Definitionen einander nicht widersprechen; bei bedingten Definitionen muß der Beweis erbracht werden, daß keine bedeutungslosen Ausdrücke zustande kommen können - was Frege für aussichtslos hielt - rein deswegen, weil eine solche bedingte Definition im System in eine Implikation übergeht, deren Umkehrung (Kontraposition) er dann für sinnlos ansah. Über Kontextdefinition stellte er fest:

Das durch die Bedeutung eines Ausdruckes und eines seiner Teile die Bedeutung des übrigen Teiles nicht immer bestimmt ist, leuchtet ein. Man darf also ein Zeichen oder Wort nicht dadurch erklären, daß man einen Ausdruck erklärt, indem es vorkommt, während die übrigen Teile bekannt sind. Denn es wäre erst eine Untersuchung nötig, ob die Auflösung für die Unbekannte - ich bediene mich eines wohlverständlichen algebraischen Bildes - möglich sei und ob die Unbekannte eindeutig bestimmt werde. Es ist aber, wie schon gesagt, unzulässig, die Rechtmäßigkeit einer Definition von dem Ausfall einer solchen Untersuchung abhängig zu machen, die überdies vielleicht garnicht einmal durchführbar wäre. Vielmehr muß die Definition den Charakter einer für die Unbekannte aufgelösten Gleichung haben, auf deren anderer Seite nichts Unbekanntes vorkommt.

Noch weniger geht es an, mit einer einzigen Definition zweierlei zu erklären, sondern jede Definition muß ein einziges Zeichen enthalten, dessen Bedeutung durch sie festgesetzt wird. Man kann ja auch nicht mit einer einzigen Gleichung zwei Unbekannte bestimmen. Es kommt aber auch vor, daß man ein ganzes System von Definitionen aufstellt, deren jede mehrere zu erklärende Worte enthält, so daß jedes dieser Worte in mehreren dieser Definitionen vorkommt. Dies gleicht einem System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, wobei dann wieder die Auflösbarkeit und die Eindeutigkeit der Bestimmung völlig fraglich bleibt. (GGS II, S. 79).

Mit diesem letzten Absatz befindet sich Frege an der Schwelle seiner Kritik an den sogenannten "impliziten Definitionen", die ein Teil seiner Polemik gegen Hilberts Über die Grundlagen der Geometrie bildete.¹⁶ Es ist übrigens zu beachten, daß Freges Grundsätze des Definierens auch da gelten, wo es sich um rein syntaktische Definitionen, also bloße Abkürzungen handelt. Diese dürfen genausowenig etwas zu einem System hinzufügen, was nicht ohne sie zu erreichen wäre: insbesondere darf nicht erst durch eine solche Definition ein Satz bewiesen werden, der ohne sie unbeweisbar wäre, d. h. nicht nur müssen alle Sätze, in dem definierten Zeichen vorkommen, immer aufgelöst werden, und in die ursprüngliche Schreibweise zurückgekehrt werden können, sondern es müssen alle solche zurückgekehrten Sätze, die mittels der Definition bewiesen werden, auch ohne sie bewiesen werden können. Wo wirklich das, was sich als Definition darstellt, ob semantisch oder syntaktisch, den Beweis eines Satzes (in der ursprünglichen Schreibweise) erst möglich macht, liegt keine Definition vor, sondern etwas, was entweder bewiesen, oder als Axiom anerkannt werden muß. Die Rechtmäßigkeit einer "bloßen Abkürzung" sollte deswegen auch nicht von einem vorher zu führenden Beweise abhängig gemacht werden.

2. Der Begriff der Funktion

2.1 Um richtig zu verstehen, was Frege unter "Funktion" verstand, darf man vor allem nicht aus dem Auge lassen, daß dieser Begriff als Urbegriff der Logik aufgefaßt wird, der deswegen schlechthin undefinierbar ist:

Durch eine Definition ist es nicht möglich anzugeben, was was eine Funktion ist, weil es sich hier um etwas Einfaches und Unzerlegbares handelt. Es ist nur möglich, auf das Gemeinte hinzuführen, und es durch Anknüpfung an Bekanntes deutlicher zu machen. An die Stelle einer Definition muß eine Erläuterung treten, die freilich auf ein entgegenkommen- des Verständnis rechnen muß. (uLM, s. 45).

Vergegenwärtigen wir uns dieses Stück aus seiner Definitionslehre:

Man kann auch nicht verlangen, daß alles definiert werde, weil man auch vom Chemiker nicht verlangen kann, daß er alle Stoffe zerlege. Was einfach ist, kann nicht zerlegt werden, und was logisch einfach ist, kann nicht eigentlich definiert werden. Das Logisch-einfache ist nun ebensowenig wie die meisten chemischen Elemente von vornherein gegeben, sondern wird erst durch wissenschaftliche Arbeit gewonnen. Wenn nun etwas gefunden ist, was einfach ist, oder bis auf weiteres als einfach gelten muß, so wird eine Benennung dafür zu prägen sein, da die Sprache einen genau entsprechenden Ausdruck ursprünglich nicht haben wird. Eine Definition zur Einführung eines Namens für Logisch-einfaches ist nicht möglich. Es bleibt dann nichts anderes übrig, als den Leser oder Hörer durch Winke dazu anzuleiten, unter dem Worte das Gemeinte zu verstehen. (BuG, s. 193).

Also fällt seine Verwendung des Wortes "Funktion" von vornherein keineswegs mit irgendeiner sonstigen Verwendung dieses Wortes zusammen, sondern kann nur durch Feststellung seiner Absichten ermittelt werden. Man könnte darüber streiten, ob es wirklich zweckmäßig war, ein schon in der Mathematik gebrauchtes Wort zur Bezeichnung seines Urbegriffes heranzuziehen, aber man darf nicht annehmen, er bezeichne deshalb dasselbe damit.

Die abgekürzte Darstellung des Frege'schen Funktionsbegriffes, die hier benötigt wird, kann nicht den Anspruch erheben, seinen Absichten in jeder Nuance so gerecht zu werden, wie die Gesamtheit seiner eigenen Ausführungen; also wird für den Streit- bzw. Unklarheitsfall auf die ursprünglichen Werke hingewiesen. Maßgebend für seine Lehre von der Funktion ist seine kleine Schrift FuB, dessen Inhalt in späteren Werken zwar ergänzt, mit Ausnahme des über die Wertverläufe Gesagten aber nie widerrufen wurde. Weiterhin enthalten die Schriften WiF und CGS I (§ 1- § 25) wesentliche Erläuterungen zu dem Begriff, während BuG und AuSuB sich mit besonders problematischen Aspekten seiner Lehre beschäftigen. Selbstver-

ständig ist der BwRussell eine recht ergiebige Quelle zur Funktions- und Klassenproblematik, dazu aber auch der BwJourdain als nachträgliche Kritik der Auffassung Russells und GS II (Nachwort). Die Fragestellung taucht auch im Laufe der Auseinandersetzung mit Hilbert auf. Sowohl das 1914 geschriebene üLM als auch seine letzten Werke - insbesondere Ver und GedGef - lehren nach wie vor den Funktionsbegriff von früher, obgleich das Wort "Funktion" in den letzten Werken gar nicht vorkommt. Es ist aber zu beachten, daß der Funktionsbegriff, wie er in Bs zuerst eingeführt worden war, nicht genau mit dem späteren Begriff übereinstimmt - worauf später näher eingegangen werden wird.

2.11 Die Erläuterung des Funktionsbegriffes fing mit einer Analyse des mathematischen Funktionsbegriffes an:

§ 1 Wenn es sich darum handelt, die ursprüngliche Bedeutung des Wortes "Funktion" in seinem mathematischen Gebrauche anzugeben, so verfällt man leicht darauf, Funktion von x einen mittelst der Bezeichnungen der Summe, des Produkts, der Potenz, der Differenz usw. aus " x " und bestimmten Zahlen gebildeten Ausdruck zu nennen. Dies ist deshalb unzutreffend, weil hierdurch die Funktion als ein Ausdruck als eine Verbindung von Zeichen, nicht als das dadurch bezeichnete hingestellt wird. Man wird darum versuchen, statt Ausdruck zu sagen "Bedeutung eines Ausdruckes". Nun kommt in dem Ausdrucke aber der Buchstabe " x " vor, der eine Zahl nicht wie etwa das Zeichen " 2 " bedeutet, sondern nur unbestimmt andeutet. Für verschiedene Zahlzeichen, die wir an die Stelle von " x " setzen, erhalten wir im Allgemeinen verschiedene Bedeutungen. Setzen wir zum Beispiel in den Ausdruck " $(2 + 3 \cdot x^2) \cdot x$ " für " x " der Reihe nach die Zahlzeichen " 0 ", " 1 ", " 2 ", " 3 " ein, so erhalten wir als zugehörige Bedeutungen die Zahlen 0 , 5 , 28 , 87 . Keine dieser Bedeutungen kann den Anspruch erheben, unsere Funktion zu sein. Das Wesen der Funktion gibt sich vielmehr in der Zusammengehörigkeit kund, die sie zwischen den Zahlen stiftet, deren Zeichen wir für " x " setzen, und den Zahlen, die dann als Bedeutungen unseres Ausdruckes auftreten, eine Zusammengehörigkeit, die sich anschaulich in dem Verlaufe der Kurve darstellt, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = (2 + 3 \cdot x^2) \cdot x$$

ist. Das Wesen der Funktion liegt demnach in dem Teile des Ausdrucks, der noch außer dem " x " vorhanden ist. Der Ausdruck einer Funktion ist ergänzungsbedürftig, ungesättigt. Der Buchstabe " x " dient nur dazu, Stellen offen zu halten, für ein Zahlzeichen, das den Ausdruck ergänzen soll, und macht so die besondere Art der Ergänzungsbedürftigkeit kenntlich, die das eigentümliche Wesen der grade bezeichneten Funktion ausmacht. Im folgenden soll statt des " x " der Buchstabe " $\mathfrak{z}$ " zu diesem Zweck gebraucht werden. (+ Hiermit soll jedoch nichts für die Begriffsschrift festgesetzt sein. Das " $\mathfrak{z}$ " wird vielmehr in den begriffsschriftlichen Entwicklungen selbst nie vorkommen; ich werde es

nur bei der Darlegung der Begriffsschrift und bei Erläuterungen gebrauchen.) Dieses Offenhalten ist so zu verstehen, daß alle Stellen, an denen " $\mathfrak{F}$ " steht, immer nur durch dasselbe, nie durch verschiedene Zeichen ausgefüllt werden dürfen. Ich nenne diese Stellen Argumentstellen, und dasjenige, dessen Zeichen (Name) in einem gegebenen Falle diese Stelle einnimmt, nenne ich Argument der Funktion für diesen Fall. Durch das Argument wird die Funktion ergänzt; das wozu sie ergänzt wird, nenne ich Wert der Funktion für das Argument. Wir erhalten also einen Namen des Wertes einer Funktion für ein Argument, wenn wir die Argumentstellen des Namens der Funktion mit den Namen des Arguments ausfüllen. So ist z. B. " $(2 + 3 \cdot 12) \cdot 1$ " ein Name der Zahl 5, zusammengesetzt aus dem Funktionsnamen " $(2 + 3 \cdot \mathfrak{F}^2) \cdot \mathfrak{F}$ " und "1". So ist denn das Argument nicht mit zur Funktion zu rechnen, sondern dient zur Ergänzung der an sich ungesättigten Funktion. Wenn im Folgenden ein Ausdruck wie "die Funktion $\Phi(\mathfrak{F})$ " gebraucht wird, so ist immer zu beachten, daß " $\mathfrak{F}$ " nur insofern zur Bezeichnung der Funktion dient, als es die Argumentstellen kenntlich macht; nicht aber so daß das Wesen der Funktion geändert wird, wenn irgendein Zeichen für " $\mathfrak{F}$ " eintritt. (GGS I, s. 5, 6).

Es ist hierzu zu bemerken: Frege verwendete von der Zeit der GGS I an (also nicht in FuB und BuG) ausschließlich kleine griechische Buchstaben, kursiv geschrieben, um die Argumentstellen in den Namen von Funktionen kenntlich zu machen, wenn er von den Funktionen selber und nicht von ihrem Wert für ein Argument reden wollte. Eine andere Konvention, die auch nur den Darlegungen der Begriffsschrift und Erläuterungen dient, ist seine Verwendung großer griechischer Buchstaben in Blockschrift zum Ausdruck der Allgemeinheit in solchen Kontexten.

Die Erläuterungen des Funktionsbegriffes aus FuB ist etwas ausführlicher:

Halten wir daran fest, so sehen wir, daß die Ausdrücke

$$"2 \cdot 1^3 + 1"$$

$$"2 \cdot 2^3 + 2"$$

$$"2 \cdot 4^3 + 4"$$

Zahlen bedeuten, nämlich 3, 18, 132. Wenn nun die Funktion wirklich nur Bedeutung eines Rechnungsausdrucks wäre, so wäre sie eben eine Zahl; und etwas neues hätten wir damit für die Arithmetik nicht gewonnen. Nun pflegt man freilich bei dem Wort "Funktion" an Ausdrücke zu denken, in denen eine Zahl durch den Buchstaben x nur unbestimmt angedeutet ist, wie etwa

$$"2 \cdot x^3 + x"$$

aber damit ist nichts geändert; denn dieser Ausdruck deutet dann eine Zahl auch nur unbestimmt an; und ob ich ihn hinschreibe, oder nur " x ", macht keinen wesentlichen Unterschied.

Dennoch werden wir eben durch die Schreibung mit dem unbestimmt andeutenden "x" auf die richtige Fassung hingeleitet. Man nennt x das Argument der Funktion und erkennt in

$$"2 \cdot 1^3 + 1"$$

$$"2 \cdot 4^3 + 4"$$

$$"2 \cdot 5^3 + 5"$$

dieselbe Funktion wieder, nur mit verschiedenen Argumenten, nämlich 1, 4, 5. Daraus ist zu ersehen, daß in dem Gemeinsamen jener Ausdrücke das eigentliche Wesen der Funktion liegt; d. h. also in dem, was in

$$"2 \cdot x^3 + x"$$

noch außer dem "x" vorhanden ist, was wir etwa so schreiben könnten

$$"2 \cdot ()^3 + ()"$$

Es kommt mir darauf an, zu zeigen, daß das Argument nicht mit zur Funktion gehört, sondern mit der Funktion zusammen ein vollständiges Ganzes bildet; denn die Funktion für sich allein ist unvollständig, ergänzungsbedürftig oder ungesättigt zu nennen. Und dadurch unterscheiden sich die Funktionen von den Zahlen von Grund aus. Und aus diesem Wesen der Funktion erklärt es sich, daß wir einerseits in $"2 \cdot 1^3 + 1"$ und $"2 \cdot 2^3 + 2"$ dieselbe Funktion erkennen, obwohl diese Ausdrücke verschiedene Zahlen bedeuten, während wir andererseits in $"2 \cdot 1^3 + 1"$ und $"4 - 1"$ trotz des gleichen Zahlenwertes nicht dieselbe Funktion wiederfinden.

Wir sehen nun auch, wie man leicht dazu verführt wird, gerade in der Form des Ausdrucks das Wesentliche der Funktion zu sehen. In dem Ausdrucke erkennen wir die Funktion dadurch, daß wir ihn zerlegt denken; und eine solche mögliche Zerlegung wird durch seine Bildung nahegelegt.

Die beiden Teile, in welche der Rechnungsausdruck so zerlegt wird, das Zeichen des Arguments und der Ausdruck der Funktion sind ungleichartig, da ja das Argument eine Zahl, ein in sich abgeschlossenes Ganzes ist, was die Funktion nicht ist. Man kann dies vergleichen mit der Teilung einer Strecke durch einen Punkt. Man ist dann geneigt, den Teilungspunkt zu beiden Teilstrecken zu rechnen. Wenn man aber die Teilung rein vornehmen will, nämlich so, daß nichts doppelt gerechnet wird und nichts ausfällt, so darf man den Teilpunkt nur zu der einen Teilstrecke rechnen. Diese wird dadurch völlig in sich abgeschlossen und ist dem Argumente zu vergleichen, während der anderen etwas fehlt. Der Teilpunkt nämlich, den man ihren Endpunkt nennen könnte, gehört nicht zu ihr. Erst dadurch, daß man sie durch diesen Endpunkt oder eine Strecke mit zwei Endpunkten ergänzt, erhält man aus ihr etwas Vollständiges. Wenn ich nun z. B. sage "die Funktion $2 \cdot x^3 + x$ ", so ist x nicht als zur Funktion gehörig zu betrachten, sondern dieser Buchstabe dient nur dazu, die Art der Ergänzungsbedürftigkeit anzudeuten, indem er die Stellen kenntlich macht, wo das Zeichen des Arguments einzutreten hat. (FuB, s. 5-8).

2.12 Auf diesen engen Begriff aber zielte Frege nicht hin, sondern auf einen viel allgemeineren Begriff, der der Mathematik eigentümlich ist:

§ 2 Als funktionsbildend hat man zu den Grundrechnungsarten noch den Grenzübergang in seinen verschiedenen Arten als unendliche Reihe, Differenzialquotienten, Integral gefügt und zuletzt das Wort "Funktion" so allgemein verstanden, daß der Zusammenhang zwischen Funktionswert und Argument unter Umständen gar nicht mehr durch die Zeichen der Analysis, sondern nur noch durch Worte bezeichnet werden konnte. Eine andere Erweiterung bestand darin, daß man als Argumente und demzufolge auch als Funktionswerte komplexe Zahlen zuließ. In diesen beiden Richtungen bin ich weiter gegangen. Während nämlich bisher die Zeichen der Analysis einerseits nicht immer ausreichen, kamen sie andererseits nicht alle bei der Bildung von Funktionsnamen zur Verwendung, indem man z.B. " $\xi^2 = 4$ " und " $\xi > 2$ " nicht als Namen von Funktionen gelten ließ, wie ich das tue. Damit ist aber zugleich gesagt, daß der Umkreis der Funktionswerte nicht auf Zahlen beschränkt bleiben kann; denn wenn ich als Argument der Funktion $\xi^2 = 4$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 nehme, so erhalte ich keine Zahlen.

$${}^02 = 4, {}^12 = 4, {}^22 = 4, {}^32 = 4$$

sind Ausdrücke von teils wahren, teils falschen Gedanken. Ich spreche dies so aus: der Wert der Funktion $\xi^2 = 4$ ist entweder der Wahrheitswert des Wahren oder der des Falschen... (GGS I, S. 6, 7).

Daß er damit auf einen logischen Begriff gekommen war, ersieht man eher aus der Erläuterung in FuB:

Wir sahen, daß der Wert unserer Funktion $x = 1$ immer einer der beiden Wahrheitswerte ist. Wenn nun für ein bestimmtes Argument z.B. -1, der Funktionswert das Wahre ist, so können wir das so ausdrücken: "Die Zahl -1 hat die Eigenschaft, daß ihr Quadrat 1 ist" oder kürzer: "-1 ist eine Quadratwurzel aus 1", oder "-1 fällt unter den Begriff Quadratwurzel aus 1". Wenn der Wert der Funktion $x = 1$ für ein Argument, z.B. 2, das Falsche ist, so werden wir das so ausdrücken können: "2 fällt nicht unter den Begriff Quadratwurzel aus 1". Wir sehen daraus, wie eng das, was in der Logik Begriff genannt wird, zusammenhängt mit dem, was wir Funktion nennen. Ja, man wird geradezu sagen können: Ein Begriff ist eine Funktion, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist. Auch der Wert der Funktion

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

ist immer ein Wahrheitswert. Wir erhalten das Wahre z.B. für das Argument -1 und werden dies auch so aussprechen können; -1 ist eine Zahl, die um 1 kleiner ist als eine Zahl, deren Quadrat ihrem Zweifachen gleich ist. Hiermit ist das Fallen der Zahl -1 unter einen Begriff ausgedrückt...

Wir werden bei den Gleichungen und den Ungleichungen nicht stehen bleiben. Die sprachliche Form der Gleichungen ist ein Behauptungssatz. Ein solcher enthält als Sinn einen Gedanken - oder macht wenigstens Anspruch darauf, einen zu enthalten; und dieser Gedanke ist im allgemeinen wahr oder falsch; d.h. er hat im allgemeinen einen Wahrheitswert, der ebenso als Bedeutung des Satzes aufzufassen ist, wie etwa die Zahl 4 die Bedeutung des Ausdruckes " $2 + 2$ " ist, oder wie London die Bedeutung des Ausdruckes "Englands Hauptstadt" ist.

Behauptungssätze im allgemeinen kann man ebenso wie Gleichungen oder Ungleichungen oder analytische Ausdrücke zerlegt denken in zwei Teile, von denen der eine in sich abgeschlossen, der andere ergänzungsbedürftig, ungesättigt ist. So kann man z. B. den Satz

Caesar eroberte Gallien

zerlegen in "Caesar" und "eroberte Gallien".

Der zweite Teil ist ungesättigt, führt eine leere Stelle mit sich, und erst dadurch, daß diese Stelle von einem Eigennamen ausgefüllt wird oder von einem Ausdrucke, der einen Eigennamen vertritt, kommt ein abgeschlossener Sinn zum Vorschein. Ich nenne auch hier die Bedeutung dieses ungesättigten Teiles Funktion. In diesem Falle ist das Argument "Caesar".

Wir sehen, daß hier zugleich eine Erweiterung in der anderen Richtung vorgenommen ist, nämlich hinsichtlich dessen, was als Argument auftreten kann. Es sind nicht mehr bloß Zahlen zuzulassen, sondern Gegenstände überhaupt, wobei ich allerdings auch Personen zu den Gegenständen rechnen muß. Als mögliche Funktionswerte sind schon vorhin die beiden Wahrheitswerte eingeführt. Wir müssen weiter gehen und Gegenstände ohne Beschränkung als Funktionswerte zulassen. Um hierfür ein Beispiel zu haben, gehen wir etwa aus von dem Ausdrucke

"die Hauptstadt des deutschen Reiches".

Dieser vertritt offenbar einen Eigennamen und bedeutet einen Gegenstand. Zerlegen wir ihn nun in die Teile

"die Hauptstadt des"

und "deutsches Reich", wobei ich die Form des Genitivs zum ersten Teile rechne, so ist dieser ungesättigt, während der andere Teil in sich abgeschlossen ist. Ich nenne also dem Früheren gemäß

"die Hauptstadt des x"

Ausdruck einer Funktion. Nehmen wir als Argument das deutsche Reich, so erhalten wir als Funktionswert Berlin.

Wenn wir also Gegenstände ohne Einschränkung als Argumente und als Funktionswerte zugelassen haben, so fragt es sich nun, was hier Gegenstand genannt wird. Eine schulgemäße Definition halte ich für unmöglich, weil wir hier etwas haben, was wegen seiner Einfachheit eine logische Zerlegung nicht zuläßt. Es ist nur möglich, auf das hinzudeuten, was gemeint ist. Hier kann nur kurz gesagt werden: Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt. (FuB, S. 15-18)

Um der Meinung entgegenzutreten, Frege habe die Logik mathematisieren wollen, weil er einen Urbegriff seiner Logik "Funktion" nannte und ihn mit Hilfe des mathematischen Funktionsbegriffes erläuterte, führen wir eine Stelle an, wo er denselben Begriff als Urbegriff der Logik vorführt, ohne überhaupt das Wort "Funktion" zu erwähnen:

Nehmen wir den Satz "Zwei ist eine Primzahl". Wir unterscheiden hier sprachlich ein Subjekt "Zwei" und einen prädikativen Bestandteil "ist eine Primzahl". Mit diesem verbindet man gewöhnlich behauptende Kraft. Jedoch ist das nicht notwendig. Wenn ein Schauspieler auf der Bühne Bedeutungssätze ausspricht, so behauptet er doch nichts wirklich und ist für die Wahrheit nicht verantwortlich. Nehmen wir also dem prädikativen Teil seine behauptende Kraft, da sie nicht notwendig dazugehört! Die beiden Teile des Satzes sind auch so noch wesentlich verschieden, und es ist wichtig einzusehen, daß dieser Unterschied ein tief einschneidender ist und nicht verwischt werden darf. Der erste Bestandteil "Zwei" ist ein Eigenname einer gewissen Zahl, bezeichnet einen Gegenstand, ein Ganzes, das keiner Ergänzung mehr bedarf[†] (+ Sätze mit "alle", "jeder", "einige" sind ganz anderer Art und bleiben hier außer Betracht.) Der prädikative Bestandteil dagegen "ist eine Primzahl" bedarf der Ergänzung, bezeichnet keinen Gegenstand. Ich nenne den ersten Bestandteil auch gesättigt, den zweiten ungesättigt. Diesem Unterschiede in den Zeichen entspricht natürlich ein solcher im Reiche der Bedeutungen: dem Eigennamen der Gegenstand, dem prädikativen Teile etwas, was ich Begriff nenne. Dies soll keine Definition sein; denn das Zerfallen in einen gesättigten und einen ungesättigten Teil muß als logische Urerscheinung angesehen werden, die einfach anerkannt werden muß, aber nicht auf Einfacheres zurückgeführt werden kann. Ich bin mir wohl bewußt, daß Ausdrücke wie "gesättigt" und "ungesättigt" bildlich sind und nur dazu dienen auf das Gemeinte hinzuweisen, wobei immer auf das entgegenkommende Verständnis des Lesers gerechnet werden muß. Immerhin kann es vielleicht dem Verständnis noch etwas näher gebracht werden, warum die Teile verschieden sein müssen. Ein Gegenstand - z. B. die Zahl 2 - kann an einem anderen Gegenstand - z. B. Julius Caesar - logisch gar nicht haften ohne ein Bindemittel, das aber kein Gegenstand sein darf, sondern ungesättigt sein muß. Eine logische Bindung zu einem Ganzen kann nur dadurch zustande kommen, daß ein ungesättigter Teil durch einen oder mehrere Teile gesättigt oder ergänzt wird. Wir haben etwas Ähnliches, wenn wir "die Hauptstadt von" ergänzen durch "Deutschland" oder "Schweden"; oder wenn wir "die Hälfte von" ergänzen durch "6".[†] (+ Was man sprachlich als Subjekt anzusehen habe, ist durch die Form des Satzes bestimmt. Anders liegt die Sache für die logische Betrachtungsweise. Wir können den Satz " $8 = 2^3$ " zerlegen entweder in "8" und "ist die dritte Potenz von 2", oder in "2" und "ist etwas, dessen dritte Potenz 8 ist" oder in "3" und "ist etwas, womit 2 potenziert, 8 ergibt".) (UGG I II, s. 371-372).

2.13 Frege aber nahm zugleich eine Reihe anderer wichtiger Erweiterungen vor:

§ 4 Bisher war nur von Funktionen eines einzigen Arguments die Rede; wir können aber leicht zu Funktionen mit zwei Argumenten übergehen. Diese sind zweifach ergänzungsbedürftig in der Art, daß eine Funktion mit einem Argumente erhalten wird, nachdem eine Ergänzung durch ein Argument bewirkt ist. Erst durch eine nochmalige Ergänzung gelangen wir zu einem Gegenstande, und dieser heißt dann Wert der Funktion für die beiden Argumente. Wie uns bei den Funktionen mit einem Argumente der Buchstabe " $\mathfrak{F}$ " diene, so gebrauchen wir hier die Buchstaben " $\mathfrak{f}$ " und " $\mathfrak{g}$ ", um die zweifache Unge-sättigtheit der Funktionen mit zwei Argumenten anzudeuten, wie in " $(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})^2 + \mathfrak{g}$ ".

Indem wir für " $\mathfrak{g}$ " z. B. " 1 " einsetzen, sättigen wir die Funktion so, daß wir in $(\mathfrak{f} + 1)^2 + 1$ nur noch eine Funktion mit einem Argumente haben. Diese Gebrauchsweise der Buchstaben " $\mathfrak{f}$ " und " $\mathfrak{g}$ " muß immer im Auge behalten werden, wenn ein Ausdruck wie "die Funktion $\Psi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ " vorkommt (vergl. die 2. Anm. in § 1). Ich nenne die Stellen, an denen " $\mathfrak{f}$ " steht, $\mathfrak{f}$ -Argumentstellen und die, an denen " $\mathfrak{g}$ " steht, $\mathfrak{g}$ -Argumentstellen. Ich sage, die $\mathfrak{f}$ -Argumentstellen seien einander verwandt und ebenso die $\mathfrak{g}$ -Argumentstellen, während ich eine $\mathfrak{f}$ -Argumentstelle nicht verwandt nenne einer $\mathfrak{g}$ -Argumentstelle.

Die Funktion mit zwei Argumenten $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f} > \mathfrak{g}$ haben als Wert immer einen Wahrheitswert (wenigstens wenn die Zeichen "=" und ">" in geeigneter Weise erklärt sind). Solche Funktionen werden wir zweckmäßig Beziehungen nennen. In der ersten Beziehung steht z. B. die 1 zu der 1, überhaupt jeder Gegenstand zu sich selbst, in der zweiten steht z. B. 2 zu 1. Wir sagen, der Gegenstand Γ stehe zu dem Gegenstande Δ in der Beziehung $\Psi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$, wenn $\Psi(\Gamma, \Delta)$ das Wahre ist. Ebenso sagen wir, der Gegenstand Δ falle unter den Begriff $\Phi(\mathfrak{f})$, wenn $\Phi(\Delta)$ das Wahre ist. (GGSI, s. 8).

Eine sehr wichtige, sogar kennzeichnende Eigentümlichkeit des Funktionsbegriffes von Frege liefert die folgende Erweiterung:

§ 21 Um nun den Gebrauch der Funktionsbuchstaben allgemein erklären zu können, bedürfen wir noch einer Benennung, die jetzt erklärt werden soll. Betrachten wir die Namen

" $\mathfrak{u}$ " $u^2 = 4$ " " $\mathfrak{u}$ " $u^2 = 1$ " " $\mathfrak{u}$ " $u > 0$ "

so erkennen wir leicht, daß wir sie aus " $\mathfrak{u}$ " $\Phi(\mathfrak{u})$ "... erhalten, indem wir den Funktionsnamen " $\Phi(\mathfrak{f})$ " der Reihe nach ersetzen durch die Namen der Funktionen $\mathfrak{f}^2 = 4$, $\mathfrak{f} > 0$, $\mathfrak{f}^2 = 1$. Es ist klar, daß nur Namen von Funktionen

mit einem Argumente, nicht Eigennamen oder Namen von Funktionen mit zwei Argumenten eingesetzt werden können; denn die einzusetzende Zeichenverbindung muß immer offene Argumentstellen haben zur Aufnahme des Buchstaben " α " (+ Daß Funktionen wie $f = f$ oder $f^2 = f \cdot f$, die für jedes Argument denselben Wert haben - man könnte sie Konstante nennen - doch von diesem Werte (Gegenstände) selbst zu unterscheiden sind, habe ich in meinem Vortrage über Funktion und Begriff (s. 8) gezeigt), und wenn wir einen Namen einer Funktion mit zwei Argumenten einsetzen wollten, so würden die f -Argumentstellen etwa unausgefüllt bleiben ...

Wir haben also in " $\neg \neg \varphi(\alpha)$ " einen Ausdruck, in dem wir den Namen der Funktion $\varphi(f)$ durch Namen von Funktionen mit einem Argumente ersetzen können, aber weder durch solche von Gegenständen, noch durch solche von Funktionen mit zwei Argumenten. Dies veranlaßt uns,

$$\neg \neg \alpha^2 = 4 \quad \neg \neg \alpha > 0 \quad \neg \neg \alpha^2 = 1 \quad \neg \neg \alpha^2 > 0$$

als Werte derselben Funktion $\neg \neg \varphi(\alpha)$ für verschiedene Argumente aufzufassen. Diese Argumente sind hier aber selbst wieder Funktionen, nämlich die Funktionen mit einem Argumente $f^2 = 4$, $f > 0$, $f^2 = 1$; $f > 0$

und nur Funktionen eines Arguments können Argumente unserer Funktion $\neg \neg \varphi(\alpha)$ sein. Wenn wir sagen "die Funktion $\neg \neg \varphi(\alpha)$ ", so vertritt " φ " ebenso das Argumentzeichen, wie " f " in dem Ausdrucke "die Funktion $f^2 = 4$ " einen Eigennamen vertritt, der als Argumentzeichen erscheinen könnte. Ebenso wenig wie " f " im letzten Falle gehört " φ " in unserem mit zur Funktion. Wir nennen nun die Funktionen, deren Argumente Gegenstände sind, die Funktionen erster Stufe, die Funktionen dagegen, deren Argumente Funktionen erster Stufe sind, mögen Funktionen zweiter Stufe heißen. Der Wert unserer Funktion $\neg \neg \varphi(\alpha)$ ist immer ein Wahrheitswert, welche Funktion erster Stufe wir auch als Argument nehmen mögen. In Übereinstimmung mit dem Früheren, werden wir sie demnach Begriff nennen, und zwar Begriff zweiter Stufe zum Unterschiede von den Begriffen erster Stufe, die Funktionen erster Stufe sind. (GGS I, s. 36 - 38).

Wie wichtig Frege diese Lehre für die Logik hielt, geht aus folgender Stelle hervor:

Betrachten wir nun den Satz "Es gibt eine Quadratwurzel aus 4"! Es ist klar, daß hier nicht von einer bestimmten Quadratwurzel aus 4 die Rede ist; sondern daß es sich um den Begriff handelt. Dieser hat auch hier seine prädikative Natur bewahrt. Man kann nämlich sagen: "Es gibt etwas, was eine Quadratwurzel aus 4 ist", oder "es ist falsch, daß was a auch sei, a keine Quadratwurzel aus 4 sei". Freilich können wir hier nicht so scheiden, daß der eine Teil dieser ungesättigte Begriff, der andere ein Gegenstand ist. Vergleichen wir den Satz "es gibt etwas, was eine Primzahl ist" mit dem Satze

"es gibt etwas, was eine Quadratwurzel aus 4 ist", so erkennen wir einen gemeinsamen Bestandteil "es gibt etwas, was", der die eigentliche Aussage enthält, während die nicht gemeinsamen Bestandteile trotz ihrer prädikativen, ungesättigten Natur eine Rolle spielen, die der des Subjektes in anderen Fällen analog ist. Von einem Begriffe wird hier etwas ausgesagt. Aber es ist klar, daß eine große Verschiedenheit besteht zwischen der Stelle der Zahl 2, wenn wir von ihr aussagen, sie sei eine Primzahl, und der des Begriffes Primzahl, wenn wir sagen, es gäbe etwas, was eine Primzahl sei. An jener Stelle können nur Gegenstände stehen, an dieser nur Begriffe. Es ist nicht nur sprachlich unstatthaft zu sagen, "es gibt Afrika" oder "es gibt Karl den Großen"; sondern es ist unsinnig. Wohl können wir sagen, "es gibt etwas, was Afrika genannt wird", und die Worte "wird Afrika genannt", bezeichnen einen Begriff. Das es gibt etwas, was ist also auch ungesättigt, aber in ganz anderer Weise als ist eine Primzahl. In jenem Falle kann die Ergänzung nur durch einen Begriff, in diesem nur durch einen Gegenstand geschehen. Wir tragen der Ähnlichkeit und der Verschiedenheit der Fälle durch folgende Redeweise Rechnung: In dem Satze "2 ist eine Primzahl" sagen wir, daß ein Gegenstand (2) unter einen Begriff erster Stufe (Primzahl) falle, während wir in dem Satze "es gibt eine Primzahl" sagen, daß ein Begriff erster Stufe (Primzahl) in einen gewissen Begriff zweiter Stufe falle. Begriffe erster Stufe können also zu Begriffen zweiter Stufe in einer ähnlichen Beziehung stehen, wie Gegenstände zu Begriffen erster Stufe. (UGG I II, s. 372, 373).

Also ist die Quantifikation im System Freges selber eine Funktion, und zwar eine von jeweils höherer Stufe, als die quantifizierte Funktion. Die Existenz ist demnach für Frege keine Eigenschaft eines Gegenstandes, sondern eine Eigenschaft eines Begriffes.

2.21 Obwohl Frege zu Beginn seiner Einführung des Funktionsbegriffes in GGG I mahnte:

Meine Begriffsschrift (Halle a. S., 1879) entspricht nicht mehr ganz meinem jetzigen Standpunkt, ist also zur Erläuterung des hier Ausgeführten nur mit Vorsicht heranzuziehen.
(GGG I, Fußnote, s: 5).

dürfte es aufschlußreich sein, seine Auffassung der Funktion aus der Bs vorzuführen. Die Unterschiede zwischen den beiden Auffassungen sind deswegen von Interesse, weil spätere Logiker eher an den Funktionsbegriff der Bs anknüpften, so daß heute nur wenige ein völlig klares Bild von seinem eigentlichen Funktionsbegriff haben. Darüber hinaus ist das Frühere rein historisch von Wert; das wirklich Umwälzende an dem Funktionsbegriff erschien damals in der Bs zum ersten Mal in der Geschichte der Logik. Auf die mangelnde Unterscheidung zwischen Zeichen und Bezeichnetem in Freges Frühschriften wurde schon hingewiesen.

Wenn in einem Ausdrucke, dessen Inhalt nicht beurteilbar zu sein braucht, ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehreren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen Stellen durch anderes, überall aber durch dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Teil des Ausdruckes Funktion, den ersetzbaren ihr Argument....

Wenn man in einer Funktion ein bis dahin als unersetzbar angesehenes Zeichen[†] († es kann auch schon vorher ersetzbar gedachtes Zeichen an solchen Stellen, wo es bisher als bleibend angesehen wurde, jetzt ebenfalls als ersetzbar aufgefaßt werden) an einigen oder allen Stellen, wo es vorkommt, ersetzbar denkt, so erhält man durch diese Auffassungsweise eine Funktion, die außer den bisherigen noch ein Argument hat. Auf diese Weise entstehen Funktionen von zwei und mehr Argumenten....

Um eine unbestimmte Funktion des Argumentes auszudrücken, lassen wir in Klammern eingeschlossen auf einen Buchstaben folgen, z. B.:

$$\Phi(A)$$

Ebenso bedeutet

$$\Psi(A, B)$$

eine Funktion der beiden Argumente A und B, die nicht näher bestimmt ist. Hierbei vertreten die Stellen von A und B in der Klammer die Stellen, welche A und B in der Funktion einnehmen, einerlei, ob dies einzelne, oder für A sowohl wie für B mehre sind. Daher ist

$$\Psi(A, B) \text{ von } \Psi(B, A)$$

im allgemeinen verschieden ...

Man kann $\Phi(A)$ lesen: "A hat die Eigenschaft Φ ".

$$\Psi(A, B)$$

mag übersetzt werden durch "B steht in der Ψ -Beziehung zu A"...

Da in dem Ausdrucke

$$\Phi(A)$$

das Zeichen an einer Stelle vorkommt, und da wir es durch andere Zeichen Ψ , χ ersetzt denken können - wodurch dann andere Funktionen des Argumentes A ausgedrückt würden - so kann man $\Phi(A)$ als eine Funktion des Argumentes auffassen. Man sieht hieraus besonders klar, daß der Funktionsbegriff der Analysis, dem ich mich im allgemeinen angeschlossen habe, weit beschränkter ist als der hier entwickelte. (Bs, s. 16-19).

Es ist hier also augenfällig, daß er im Gegensatz zu seiner späteren Meinung die Funktion für einen sprachlichen Ausdruck hält. Es fehlt auch natürlich der systematische Aufbau, der seine spätere Erläuterung charakterisiert. Nichtsdestoweniger ist das sehr breiter Funktionsbegriff - und durchwegs ein logischer (die klaren Hinweise auf Eigenschaften und Beziehungen!) - der die Grundlage einer mehrstelligen, mehrstufigen Prädikatenlogik anbietet.

2.22 Nicht uninteressant wäre die Frage, wie Frege zu diesem Begriff der logischen Funktion kam. Da er sich aber nur äußerst selten auf die Quellen bezog, die ihn zu seinen Auffassungen führten, ist es überhaupt schwierig, die mögliche Vorgeschichte zu irgendeiner seiner Entdeckungen zu rekonstruieren. Mit seinem Funktionsbegriff ist es diesbezüglich besonders dürftig bestellt - man kann höchstens auf Anregungen hinweisen.

2.221 Obwohl Frege von seinem Studium her Geometer war, ging er in seiner Habilitationsschrift auf eine andere Problematik über - auf den Größenbegriff, den er auf den mathematischen Funktionsbegriff zurückführen wollte. Obwohl er sich dabei auf einen engen Aufgabenkreis beschränkte, mußte es ihm klar geworden sein, daß die konsequente Durchführung des Programmes einen weitaus allgemeineren Funktionsbegriff als den klassischen mathematischen verlangte.

2.222 Frege war ein Schüler Hermann Lotzes in Göttingen. Im Jahre 1874, also im Jahre der Promotion von Frege, erschien die erste Auflage von Lotzes zweiter Logik¹⁷, dessen Inhalt als Maß dafür gewertet werden kann, was Frege an Logik von Lotze hatte lernen können¹⁸. Im Kapitel über Begriffsbildung untersucht Lotze die Verschiedenheit der Weisen, in welchen Begriffe zusammengesetzt werden, was ihn zu folgendem Vorschlag führt:

Die Verfolgung dieser Mannigfaltigkeit ist zu weitläufig; zu der Überzeugung aber würde sie führen, daß im allgemeinen die Merkmale eines Begriffes nicht gleichwertig einander koordiniert sind, daß sie vielmehr in den mannigfachsten Stellungen sich aufeinander beziehen, einander verschiedenartige Anlagerungen vorschreiben und so sich wechselseitig determinieren, daß ein zutreffendes Symbol für den Bau eines Begriffes nicht die Gleichung $S = a + b + c + d + \dots$ sondern höchstens die Bezeichnung $S = F(a, b, c, \dots)$ ist.¹⁹

Nun hat diese etwas lockere Vermutung kaum nur eine entfernte Verwandtschaft mit dem (fünf Jahre) später eingeführten Funktionsbegriff von Frege. Dies ist vor allem deshalb nicht so, weil Lotze den Begriff als Funktion seiner Merkmale - also anderer Begriffe - auffasste, und weil er die Natur dieses funktionalen Zusammenhanges rätschhaft fand. Interessant ist lediglich, daß Freges Lehrer den Begriff überhaupt als eine Funktion betrachtete.

2.3 Nun war Frege sehr entschieden der Meinung, daß dieser sein Funktionsbegriff von so einfacher und allgemeiner Natur war, daß er nicht auf etwas einfacheres hätte zurückgeführt werden können. Insbesondere bekämpfte er die Ansichten, wonach die Begriffe der Menge, der Variablen oder der Zuordnung logisch früher als sein Funktionsbegriff sein sollte - vielmehr setzten diese Begriffe seinen Funktionsbegriff voraus.

2.31 Frege plädierte überhaupt dafür, daß die Bezeichnung "Variable" bzw. "Veränderliche" aus der Logik und Mathematik verbannt werde. Allerdings sind die meisten Irrtümer, die er damals bekämpfte, heute als solche in der Logik anerkannt worden, vor allem die Meinung, eine Variable sei die Bedeutung eines Zeichens, und zwar eine Bedeutung, die unbestimmt sei, bzw. die sich ändere. Frege erwiderte, ein Zeichen, dessen Bedeutung unbestimmt sein solle, sei bedeutungslos, und ein Gegenstand, der sich ändere, ändere sich in der Zeit, was die Logik von vorneherein nicht angeht, und bleibe dennoch derselbe Gegenstand. Da nun Frege nur das "Zeichen" nannte, was etwas bezeichnen soll, also eine Bedeutung hat, hätte er sich bestimmt nicht mit dem heutigen Wortgebrauch anfreunden können, wonach die Variable ein Zeichen sei; die Unterscheidung aber, die heute gemacht wird, war genau das, was er damals durchsetzen wollte: man gebraucht gewisse Figuren zu anderen Zwecken als zum Bezeichnen. Bei den sogenannten "freien Variablen" z. B. unterschied er zwei ganz verschiedene Zwecke: in dem einen Fall, um die leeren Stellen in Funktionsnamen kenntlich zu machen (für die seltenen Fälle, wo man die Funktion isoliert bezeichnen will), und im anderen Falle, um einem Ausdruck Allgemeinheit des Inhaltes zu verleihen. In keinem der beiden Fälle bezeichnet die Figur etwas, und in beiden Fällen ist es die Kenntnis dessen, was eine Funktion sei, vorausgesetzt, um deren Gebrauch zu erklären. Was man "gebundene Variable" nennt, ist in Freges System Teil eines Funktionsnamens. Zu allen diesen verschiedenen Zwecken verwendete Frege konsequent verschiedene Figuren, was dazu beiträgt, seine Schrift viel übersichtlicher zu machen - ein Vorteil, auf den er nicht verzichten wollte:

Der letzte Satz "Freges conventions here are not necessary and were abandoned by Russell" fällt mir auf. Wo steht das bei Russell ? Es ist richtig: Man kann allenfalls die unterscheidende Gebrauchsweise der lateinischen und deutschen, vielleicht auch der griechischen Buchstaben fallen lassen; aber auf Kosten der Durchsichtigkeit der Formeln.
(BwJBem, s. 1).

2.32 Die Meinung, eine Funktion sei eine Zuordnung, entsteht aus der Verwendung eines engeren Funktionsbegriffes als des Frege'schen; vielmehr kann man mittels Freges Begriff genau angeben, was eine Zuordnung sei, nämlich eine mehrstellige Funktion, deren Werte ausschließlich Wahrheitswerte sind und die selbst eine Eindeutigkeitsbedingung erfüllt. Versucht man ferner einmal wirklich zu erklären, was es heißt daß ein Gegenstand einem anderen zugeordnet wird oder ist, dann wird man sofort auf den Frege'schen Funktionsbegriff zurückgeführt (wenn man nicht auf eine unendliche Reihe von Zurückführungen einer Zuordnung auf eine andere kommen will): Jede bestimmte Zu-

ordnung ist das Ergebnis eines bestimmten Zuordnens. Was tut man, wenn man Gegenstände einander zuordnet ? Man ändert nichts an den Gegenständen selber - auch dann, wenn man z.B. Gegenstände in ein eindeutiges, räumliches Verhältnis zueinander wie beim Tischdecken bringt, ist diese Tat selbst kein Zuordnen, sondern nur eine Änderung in der räumlichen Lage der Gegenstände so, daß sie einander zugeordnet sind, wobei die eigentliche Zuordnung in der Raumbeziehung des Nebeneinanders liegt. Es wird immer darauf ankommen, daß das Zuordnen nicht mehr als das Festsetzen der Bedeutungen ist, welche ein unvollständiger Ausdruck erhält, wenn man die leeren Stellen des Ausdruckes mit anderen Ausdrücken ausfüllt. Dann ist man bei dem Frege'schen Funktionsbegriff gelandet.

2.33 Eine Klasse wird nur durch einen Begriff gegeben. Der Bestand einer Klasse liegt in dem Begriff, wonach entschieden wird, welche Gegenstände Elemente der Klasse sind, nicht aber in den Elementen selber. Dies wäre auch der Fall, wenn man die Klasse für den Begriff hielte: Die Klasse würde dann wie der Begriff bei Frege dadurch gegeben, daß für jeden Gegenstand bestimmt wäre, ob er Element der Klasse sei oder nicht, und nicht durch die Elemente selber. Deshalb behauptete Frege, man könne nicht erklären, was eine Klasse oder eine Menge sei, ohne vorher erklärt zu haben, was ein Begriff sei. Diese einsichtige Tatsache wurde zu Freges Zeit und wird heute noch von manchen Mathematikern zugunsten der irrigen Meinung übersehen, die Klasse bzw. die Menge bestehe aus seinen Elementen wie ein Ganzes aus seinen Teilen. Entweder, man versteht unter "Klasse" bzw. "Menge" etwas anderes als in der Logik oder in der Mengenlehre, oder die genannte Meinung ist einfach falsch: Sie ist nicht nur falsch, weil es danach keine leere Klasse geben könne, sondern auch, weil nach ihr die Relation einer Klasse zu ihren Elementen eine transitive sein müßte, was sie nicht ist: Wenn z.B. die Klasse der Atome eines Gegenstandes mit dem Gegenstand selber identisch wäre, dann wäre jedes Molekül aus dem Gegenstand Element der Klasse der Atome des Gegenstandes, denn die Klasse der Moleküle wäre auch mit dem Gegenstand selber identisch und also auch mit der Klasse der Atome. Frege hat jahrzehntelang gegen diesen Irrtum, auf den er glaubte als erster hingewiesen zu haben, heftig gekämpft. Eine ausgezeichnete Zusammenfassung des Kernes seiner Lehre darüber befindet sich in einem Brief an Russell:

Wir können wohl folgende Fälle unterscheiden:

1. "Sokrates und Platon sind Philosophen." Hier haben wir zwei Gedanken; Sokrates ist ein Philosoph und Platon ist ein Philosoph, die nur sprachlich aus Bequemlichkeit in einen Satz zusammengezogen sind. Logisch ist Sokrates und Platon

nicht als Subjekt aufzufassen, von dem Philosophen zu sein ausgesagt wird.

2. "Bunsen und Kirchhoff haben die Spektralanalyse begründet". Hier müssen wir Bunsen und Kirchhoff als ein Ganzes betrachten. Ebenso ist aufzufassen "die Römer eroberten Gallien". Die Römer sind hier das römische Volk, zusammengehalten durch Sitten, Einrichtungen und Gesetze. Ein Heer ist in diesem Sinne ein Ganzes, ein System. Jeden physischen Körper betrachten wir als Ganzes, als System, bestehend aus Teilen.

3. "Die Klasse der Primzahlen umfaßt unendlich viele Gegenstände". Hier ist die Klasse der Primzahlen ein Gegenstand; aber nicht ein Ganzes, dessen Teile Primzahlen wären. Ich möchte nicht sagen, daß diese Klasse aus Primzahlen bestehe. Dieser Fall unterscheidet sich von dem vorhergehenden so: Erstens: Ein Ganzes, ein System wird immer durch Beziehungen zusammengehalten und diese sind wesentlich. Ein Heer wird zerstört, wenn sein Zusammenhalt aufgelöst, wenn auch die einzelnen Krieger am Leben bleiben. Dagegen sind für die Klasse die Beziehungen gleichgültig, in denen die ihr angehörenden Gegenstände zueinander stehen. Zweitens: Dadurch, daß ein Ganzes gegeben ist, ist noch nicht bestimmt, welche seiner Teile ins Auge zu fassen sind. Als Teile eines Regiments kann ich ansehen die Bataillone, die Kompagnien oder die einzelnen Soldaten, als Teile eines Sandhaufens die Sandkörner oder die Silicium-Sauerstoffatome. Wenn dagegen eine Klasse gegeben ist, so ist bestimmt, welche Gegenstände ihr angehören. Der Klasse der Primzahlen gehören nur Primzahlen an, nicht aber die Klasse der Primzahlen von der Form $4n + 1$; denn diese Klasse ist keine Primzahl. Die Klasse der Kompagnien eines gegebenen Regiments gehören nur Kompagnien an, aber nicht einzelne Soldaten. Für die Ganzen oder Systeme haben wir den Satz, daß ein Teil des Teiles Teil des Ganzen ist: Dieser Satz gilt nicht von den Klassen hinsichtlich der ihnen angehörenden Gegenstände. Die Beziehung einer Kompagnie zu einer Klasse von Kompagnien ist ganz verschieden von der Beziehung dieser Kompagnie zum Regimente, dessen Teil sie ist. Die Gegenstände, die einer Klasse angehören, können zugleich ein System bilden. Doch ist dabei immer noch System und Klasse zu unterscheiden. Die Klasse der Atome, die den Stuhl bilden, auf dem ich sitze, ist nicht der Stuhl selbst. Ein Ganzes, dessen Teile materiell sind, ist selbst materiell; eine Klasse dagegen möchte ich nicht als physischen, sondern als logischen Gegenstand bezeichnen. (BwRussell, 28. VII. 1902).

Es ist interessant, daß er es gar nicht für nötig hielt, zu bemerken, daß es kein System ohne Teile geben kann, obwohl dies in PSAL seinen Haupteinwand gegen Schröders Vermengung von System und Klasse bildete. Sein prinzipielles Bedenken gegen die Redewendung "die Klasse bestehend aus..." ist wichtig, weil diese leicht den Eindruck erweckt, als ob eine Klasse durch Hinweis oder Aufzählung gebildet werden könnte, ohne daß man dabei einen Begriff angäbe - tatsächlich gibt es zu jeder Aufzählung den Begriff, Gegen-

stand, der durch die Aufzählung erfaßt wurde, und dieser Begriff liefert den Bestand der Klasse, nicht die Tat des Aufzählens oder Hinweisens. Ein weiteres Eingehen auf Klassenproblematik wird hier vorerst zurückgestellt, da diese ganze Fragestellung unten gründlich untersucht wird; dann wird es möglich sein, eine starke Stütze für Freges Ansicht der Priorität seines Funktionsbegriffes über den Klassenbegriff zu erörtern - man kann nämlich eine sehr umfassende Logik ohne Klassen aufbauen, wohingegen es nicht möglich ist, irgendetwas mit Klassen anzufangen, ohne daß man zugleich mindestens eine Funktion (im Frege'schen Sinne) hat.

2.4 So erstaunlich es ist, daß Freges Forderung des Nachweises jeder rechtmäßig gebildete Ausdruck eines Systems habe eine Bedeutung, so lange unbeachtet geblieben ist, ist es noch erstaunlicher, daß die geniale Weise, wie er diese Anforderung für sein System zu erfüllen versuchte, nie irgendwelche Aufmerksamkeit auf sich hat lenken können. Es ist eine seiner größten Leistungen und verdient es, sorgfältig studiert zu werden. Um möglichen Mißverständnissen bei der Untersuchung seines Beweises vorzubeugen, werden zuerst seine eigenen terminologischen Festsetzungen, insofern sie für den Beweis erheblich sind, hier angeführt:

Ich nenne also Eigennamen oder Namen eines Gegenstandes ein Zeichen, welches einen Gegenstand bedeuten soll, mag es einfach oder zusammengesetzt sein, aber nicht ein solches, welches einen Gegenstand nur andeutet.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Eigennamen, der einem Teil von jenem bildet oder mit ihm zusammenfällt, an einigen oder allen Stellen, wo er vorkommt, ausschließen, so jedoch, daß diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen...kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente. Ein solcher Name bildet mit einem Eigennamen, der die Argumentstellen ausfüllt, einen Eigennamen... Wenn wir von einem Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente einen Eigennamen, der einen Teil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschließen, so jedoch, daß diese Stellen als den einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen...kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, Namen einer Funktion erster Stufe, mit zwei Argumenten.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Namen einer Funktion erster Stufe, der einen Teil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschließen, so jedoch, daß diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Namen einer Funktion erster Stufe auszufüllen...kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, Namen einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argument... Namen von Funktionen nenne ich kurz Funktionsnamen.
(GUS I, s. 43, 44).

Ausgelassen dabei wurde eine Vorrichtung, zur Unterscheidung Funktionen zweiter Stufe, je nachdem ihre Argumentstellen für Funktionen erster Stufe mit einem oder mit zwei Argumenten zugelassen sind, weil es für den Zweck dieser Analyse unnötig komplizierend ist. Hieraus ergibt sich verhältnismäßig leicht die Bestimmung des rechtmäßig gebildeten Ausdruckes:

Rechtmäßig gebildet nenne ich einen Namen, wenn er nur aus solchen Zeichen besteht, welche ursprünglich oder durch Definition eingeführt sind, und wenn diese Zeichen nur als das verwendet sind, als was sie eingeführt sind, also Eigennamen als Eigennamen, Namen von Funktionen erster Stufe mit einem Argument als solche usw., so daß die Argumentstellen immer durch passende Namen... ausgefüllt sind. (GG5 I, s. 45).

Die Bestimmung behandelt weiter gewisse syntaktische Eigentümlichkeiten, die hier nicht von Belang sind. Die nächsten Festsetzungen gehen über den gewöhnlichen Rahmen hinaus: da sie eine Adäquatheitskonvention dafür darstellen, wann ein Name eine Bedeutung habe, bilden sie die eigentliche Grundlage seines Beweises:

§ 29 Wir beantworten nun die Frage: Wann bedeutet ein Name etwas ? und beschränken uns auf folgende Fälle.

Ein Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente hat dann eine Bedeutung (bedeutet etwas, ist bedeutungsvoll), wenn der Eigenname, der aus diesen Funktionsnamen dadurch entsteht, daß die Argumentstellen mit einem Eigennamen ausgefüllt werden, immer dann eine Bedeutung hat, wenn dieser eingesetzte Name etwas bedeutet.

Ein Eigenname hat eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, daß jener die Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, daß der zu prüfende Eigenname die $\S$ -Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Funktion erster Stufe mit zwei Argumenten ausfüllt, und wenn dasselbe auch für die $\S$ -Argumentstellen gilt.

Ein Name einer Funktion erster Stufe mit zwei Argumenten hat dann eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der aus diesem dadurch entsteht, daß die $\S$ -Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen und daß auch die $\S$ -Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen ausgefüllt werden.

Ein Name einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art hat eine Bedeutung, wenn allgemein daraus, daß der Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, daß der durch seine Einsetzung in die Argumentstellen unserer Funktion zweiter Stufe entstehende Eigenname eine Bedeutung habe.

Folglich bildet jeder Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente, welcher mit jedem bedeutungsvollen Ei-

genannten einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, auch mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art einen bedeutungsvollen Eigennamen.

Der Name " $\text{f}_{\text{M}_\beta}(\text{f}(\beta))$ " einer Funktion dritter Stufe ist bedeutungsvoll, wenn allgemein daraus, daß ein Name einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art etwas bedeute, folgt, daß auch der durch dessen Einsetzung in die Argumentstellen von

$\text{f}_{\text{M}_\beta}(\text{f}(\beta))$

entstehende Eigename eine Bedeutung habe.

§ 30 Diese Sätze sind nicht als Erklärung der Worte "eine Bedeutung haben" oder "etwas bedeuten" aufzufassen, weil ihre Anwendung immer voraussetzt, daß man einige Namen schon als bedeutungsvoll erkannt habe; sie können aber dazu dienen, den Kreis solcher Namen allmählich zu erweitern. Es folgt aus ihnen, daß jeder aus bedeutungsvollen Namen gebildete Name etwas bedeutet. (GGS I, s. 45, 46).

2.41 Wenn ein Kreis von Namen gegeben ist, die nach ihren eigenen Bedeutungsfestsetzungen im Sinne von Freges Kriterien bedeutungsvoll sind, dann sind alle aus ihnen rechtmäßig gebildeten Namen auch bedeutungsvoll. Diese letzte Behauptung von Frege kann bewiesen werden: Erstens, es geht unmittelbar aus seinen Bedeutungskriterien hervor, daß jeder Name, der dadurch hervorgeht, daß man einen bedeutungsvollen Namen in die ihm passenden Argumentsstellen eines bedeutungsvollen Namens einsetzt, wiederum ein bedeutungsvoller Name ist. Zweitens ist sowohl jeder Name einer Funktion erster Stufe mit einem (bzw. zwei) Argumente bedeutungsvoll, der dadurch hervorgeht, daß man in dem bedeutungsvollen Namen eines Gegenstandes (bzw. einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente) den Namen eines Gegenstandes, der einen Teil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschließt (so jedoch, daß die Stellen, wo er war, als Argumentsstellen der betreffenden Art kenntlich bleiben), wie auch jeder Name einer Funktion zweiter Stufe bedeutungsvoll ist, der dadurch hervorgeht, daß man in dem bedeutungsvollen Namen eines Gegenstandes den Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschließt, (so jedoch, daß die Stellen, wo er war, als Argumentsstellen der betreffenden Art kenntlich bleiben). Mithin sind dann alle rechtmäßig gebildeten Namen bedeutungsvoll. Daß die zweite Art der Namensbildung immer zu bedeutungsvollen Namen führt, leuchtet nicht so unmittelbar ein, folgt aber aus den Bedeutungskriterien; dies dürfte einsichtiger sein, wenn man sich vergegenwärtigt, daß das einzige, wovon bei der Zusammensetzung bedeutungsvoller Namen zu bedeutungsvollen Namen Gebrauch gemacht wird, ist, daß die Namen, wovon

ausgegangen wird, bedeutungsvoll sind - was man dabei mit einem bedeutungsvollen Namen macht, kann man genauso gut und mit demselben Recht mit irgendeinem anderen bedeutungsvollen Namen derselben Kategorie machen. Z.B. kommt in einem bedeutungsvollen Gegenstandsnamen ein bedeutungsvoller Gegenstandsname an der Argumentsstelle eines bedeutungsvollen Funktionsnamens vor, wie "... $\Phi(\Delta)$...", und man ersetze den Namen " Δ " durch einen beliebigen anderen bedeutungsvollen Gegenstandsnamen, sagen wir " Γ ", dann bildet der Funktionsname " $\Phi(\Gamma)$ ", da bedeutungsvoll und deshalb zusammen mit jedem bedeutungsvollen Gegenstandsnamen wieder einen bedeutungsvollen Gegenstandsnamen bildend, mit diesem Namen " Γ " genau wie mit dem ersten " Δ " einen bedeutungsvollen Gegenstandsnamen, und "... $\Phi(\Gamma)$..." ist bedeutungsvoll aus demselben Grund wie "... $\Phi(\Delta)$...", denn er ist in derselben Weise gebildet: d.h. aber, daß der Name "... $\Phi(\xi)$..." zusammen mit jedem bedeutungsvollen Gegenstandsnamen einen bedeutungsvollen Gegenstandsnamen bildet, was nach den Bedeutungskriterien besagt, daß "... $\Phi(\xi)$..." der bedeutungsvolle Name einer Funktion erster Stufe ist.

Wiederum ersetze man in dem Namen "... $\Phi(\Delta)$..." den Funktionsnamen " $\Phi(\xi)$ " durch einen beliebigen anderen bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe, sagen wir " $\Psi(\xi)$ ", dann sind sowohl " $\Psi(\Delta)$ " wie auch "... $\Psi(\Delta)$..." bedeutungsvoll aus demselben Grund wie "... $\Phi(\Delta)$ " und "... $\Phi(\Delta)$...", da " Δ " zusammen mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe einen bedeutungsvollen Namen bildet: dies aber besagt nichts anderes, als daß der Name "... $\Psi(\Delta)$..." der bedeutungsvolle Name einer Funktion zweiter Stufe ist. Letzteres gilt auch da, wo in einem bedeutungsvollen Gegenstandsnamen der bedeutungsvolle Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente an den Argumentsstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Funktion zweiter Stufe, wie etwa "... $M_\beta(\Phi(\beta))$...": da " $M_\beta(\Psi(\beta))$ " bedeutungsvoll ist und zusammen mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente einen bedeutungsvollen Gegenstandsnamen bildet, so ist auch jeder Name, der aus "... $M_\beta(\Psi(\beta))$..." dadurch hervorgeht, daß man den bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente in die Ψ -Argumentsstellen einsetzt, bedeutungsvoll und mithin ist "... $M_\beta(\Psi(\beta))$..." der bedeutungsvolle Name einer Funktion zweiter Stufe.

Ein interessanter Fall ist der folgende: Es sei wieder "... $\Phi(\Delta)$..." der bedeutungsvolle Name eines Gegenstandes, gebildet zum Teil aus dem bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe " $\Phi(\xi)$ " und dem bedeu-

tungsvollen Namen eines Gegenstandes " Δ ". Dann ist der Name einer Funktion zweiter Stufe "... $\varphi(\Delta)$..." bedeutungsvoll. Ist weiter der Name einer Funktion dritter Stufe " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mu_{\beta}(\mathcal{F}(\beta))$ " bedeutungsvoll (Freges Name einer Funktion dritter Stufe wird hier verwendet, ohne die Frage zu präjudizieren, ob er wirklich bedeutungsvoll ist), so ist auch der Gegenstandsname " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\Delta)$..." bedeutungsvoll. Ist dieser aber bedeutungsvoll, dann auch der Name einer Funktion erster Stufe " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\mathcal{F})$..." in derselben Weise, wie der bedeutungsvolle Eigenname " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\Delta)$..." aus dem bedeutungsvollen Eigennamen " Δ " gebildet wurde, kann aus jedem bedeutungsvollen Gegenstandsnamen ein bedeutungsvoller Eigenname gebildet werden, der mit dem identisch ist, was man aus der Einsetzung des Ausgangseigennamens in die Argumentstellen von " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\mathcal{F})$..." erhält; ganz allgemein, wenn " $\mathcal{F}$ " ein bedeutungsvoller Eigenname ist, dann ist " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\mathcal{F})$..." ein bedeutungsvoller Eigenname - dies gilt auch dann, wenn " $\mathcal{F}$ " z. B. ein Eigenname ist, der zusammengesetzt ist aus " $\text{---}\mathcal{F}\text{---}\mathcal{F}(\mathcal{F})$..." und dem (bedeutungsvollen) Namen einer Funktion zweiter Stufe. Dies ist der Betonungswert, weil solche Bildungen den Typus des sogenannten "imprädikativen Begriffes" darstellen. Um deutlicher zu sein: Wenn ein Bereich von Namen vorliegt, die nach ihren eigenen Bedeutungsfestsetzungen im Sinne der Kriterien von Frege bedeutungsvoll sind, dann sind auch imprädikative Bildungen aus ihnen im Sinne der Kriterien von Frege bedeutungsvoll. Es wird wohl kaum eine andere Weise geben, die Frage nach der Gültigkeit bzw. Ungültigkeit imprädikativer Begriffe objektiv zu entscheiden, als daß man objektive Kriterien angibt, die jeder korrekte Begriff erfüllen muß, und dann feststellt, ob derartige Begriffsbildungen diesen Kriterien genügen oder nicht.

2.42 Angesichts eben dieser Allgemeinheit von Freges Kriterien dürfte es zunächst fragwürdig erscheinen, ob es überhaupt möglich ist, Bedeutungsfestsetzungen für ein System von Zeichen so aufzustellen, daß sie diese Kriterien erfüllen. Den Weg zur Lösung dieses Problems aber hat Frege in genialer Weise angebahnt: Er hat gezeigt, wie das immer möglich sein kann. Man geht zunächst von einem Bereich von Gegenständen aus; wenn nach den Bedeutungsfestsetzungen die Bedeutungen aller einfachen Gegenstandsnamen aus diesem Bereich genommen werden und wenn die Werte sämtlicher einfacher Funktionsnamen aus diesem Bereich genommen werden, und wenn die einfachen Namen von Funktionen erster Stufe für die Namen von allen Gegenständen des Bereiches als Argument einen Wert

zugewiesen bekommen, dann sind alle Namen von diesen Gegenständen bedeutungsvolle Eigennamen im Sinne von Freges Kriterien und alle einfachen Namen von Funktionen erster Stufe sind im Sinne der Kriterien gleichfalls bedeutungsvoll. Damit ferner die Namen von Funktionen höherer Stufe bedeutungsvoll seien, ist nur notwendig, daß deren Bedeutungsfestsetzungen von nichts mehr Gebrauch machen, als daß die Namen von Argumenten jeweils bedeutungsvoll sind. (Mit anderen Worten: Wenn man festsetzt, bedeutungsvolle Eigennamen sind alle und nur diejenigen Eigennamen eines Systems, die nach den Bedeutungsfestsetzungen des Systems Gegenstände eines bestimmten, angegebenen Bereiches bedeuten, so ist damit gegeben, welche Namen nach den Bedeutungsfestsetzungen des Systems im Sinne von Freges Kriterien bedeutungsvoll sind.) So kommt man nie aus dem Bereich der bedeutungsvollen Eigennamen heraus - jeder rechtmäßig aus den einfachen Namen gebildete Gegenstandsname ist bedeutungsvoll, weil er eben einen Gegenstand von dem Bereich von Gegenständen bedeutet, für die sämtliche einfachen Funktionsnamen erklärt sind - und mithin sämtliche rechtmäßig gebildeten Funktionsnamen, da alle deren Argumentstellen ursprüngliche Argumentstellen von einfachen Funktionsnamen sind.

Der großartige Einfall hierbei ist, daß man zunächst von den Gegenständen ausgeht, statt von Namen - die Bedeutungsfestsetzungen handeln dann vorerst nicht von bestimmten Namen, sondern von Namen bestimmter Gegenstände (was auch sonst bei den Bedeutungsfestsetzungen notwendig ist, wenn von den Werten bzw. von den Bedeutungen der einfachen Eigennamen die Rede ist). Es muß in dieser Hinsicht aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Durchführung dieses Beweises nicht abhängig ist von der Art der zu dem ursprünglichen Bereich gehörenden Gegenstände, insbesondere nicht von ihren etwaigen ontologischen Kategorien: es muß immer möglich sein, an Stelle der gerade gewählten Gegenstände den Beweis an Hand von beliebigen, anderen, willkürlich ausgewählten Gegenständen rein formalistisch durchzuführen.

Dieses Vorgehen zeigt einige Charakteristika auf, die nicht unwichtig sind: erstens ist es immer möglich, den Bereich der Urgegenstände dadurch zu erweitern, daß man sämtliche einfachen Namen von Funktionen erster Stufe für die Namen der dazugenommenen Gegenstände erklärt. Es ist ferner möglich, den Bereich der einfachen Namen von Funktionen erster Stufe dadurch zu erweitern, daß man die hinzuzufügenden Namen für die Namen sämtlicher jeweils zum Bereich der Ur-

gegenstände gehörender Gegenstände erklärt, vorausgesetzt natürlich, daß die Werte der hinzuzufügenden Funktionen auch aus dem Bereich der Urgegenstände genommen werden. Sowohl der Bereich der Urgegenstände, wie auch der Bereich der einfachen Funktionsnamen werden zugleich erweitert, wenn man einen Funktionsnamen hinzufügen will, dessen Werte von vorneherein nicht alle zu dem Bereich der Urgegenstände gehört - selbstverständlich müssen aber zugleich alle übrigen einfachen Namen von Funktionen erster Stufe für Namen von den neuen Gegenständen erklärt werden. Auf diesen Erweiterungsmöglichkeiten beruht die Annahme, die logischen Gesetze gelten für alle Gegenstände, Begriffe und Beziehungen, obwohl zunächst nur von einem beschränkten Bereich von logischen Gegenständen, Begriffen und Beziehungen die Rede ist: die Wahrheit von Gesetzen, die sich aus den Bedeutungsfestsetzungen für bestimmte Zeichen eines Systems ergibt, wird nicht durch solche Erweiterung des Systems geändert, die keine Änderung jener Festsetzungen mit sich bringen. Zweitens schließt diese Methode die Einführung bedeutungsvoller Namen auf anderem Wege nicht aus: man kann z. B. immer einen neuen einfachen Eigennamen zu dem Bereich der bedeutungsvollen Eigennamen (also die Namen der Urgegenstände plus alle in dieser Weise hinzugefügten Eigennamen) dadurch hinzufügen, daß man alle einfachen Namen von Funktionen erster Stufe für diesen Namen erklärt (natürlich mittels Werten aus dem Bereich der Urgegenstände). Drittens setzt dieses Verfahren voraus, daß der Bereich der Urgegenstände beschränkt ist. Will man den Bereich so breit erweitern, daß es nicht mehr möglich ist, die zu ihm gehörenden Gegenstände alle namentlich zu benennen, was natürlich nur in der Weise möglich ist, daß man eine Funktion einführen will, deren Wertebereich unbegrenzt ist, dann muß man den zweiten Weg einschlagen und von Namen reden - ein Vorgehen, das zwar möglich ist, aber gewissen Einschränkungen unterliegt, wie an späterer Stelle gezeigt wird. Es ist aber bei allen solchen Erweiterungen zu beachten, daß dadurch Eigenschaften des Systems in Bezug auf die Bedeutungsfestsetzungen geändert werden, so daß es keineswegs eine Selbstverständlichkeit wäre, daß irgendeine beliebige, ausgezeichnete Eigenschaft - die vielleicht als Grundlage eines Axioms dient - durch die Erweiterung nicht geändert wird. So etwas muß immer nachgeprüft werden.

2.43 In seinem System der GGG ging Frege zunächst von zwei Urgegenständen aus - dem Wahren und dem Falschen - und erklärte darauf zwei einstellige Funktionen erster Stufe und zwei zweistellige Funktionen erster

Stufe, ferner je eine Funktion zweiter und dritter Stufe. Für das System läßt sich so weit einwandfrei beweisen, daß jene sechs Zeichen und mit- hin alle rechtmäßig aus ihnen gebildeten Zeichen im Sinne seiner Krite- rien bedeutungsvoll sind. Erst bei dem Versuch, das System auf unbe- grenzt viele Gegenstandsnamen zu erweitern, beging er einen Fehler, und der Nachweis, daß er glaubte geführt zu haben, läßt sich nicht so führen, wie später gezeigt wird. Das engere System aber mit den fünf Axiomen, die er daraus aufstellte, bildete eine mehrstellige und mehr- stufige Prädikatenlogik, an deren Gültigkeit zu zweifeln es keinen objek- tiven Grund gibt. Denn: wenn in einem System keinem einfachen Eigen- namen nach den Bedeutungsfestsetzungen des Systems zwei oder mehre- re Bedeutungen beigelegt werden und keinem einfachen Namen einer Funk- tion erster Stufe für denselben Gegenstand, bzw. Gegenstandsnamen zwei oder mehrere Werte zugewiesen werden, und wenn alle Urnamen des Sy- stemes nach Freges Bedeutungskriterien bedeutungsvoll sind, dann hat jeder rechtmäßig gebildete Eigenname des Systems genau eine Bedeu- tung. Dies gilt für das engere System der GGs und sichert die Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in jenem System. Von diesem System redete Frege, als er Jourdain schrieb:

Bei meiner Weise, die Begriffe als Funktionen aufzu- fassen, kann man die Hauptsache der Logik behandeln, ohne von Klassen zu sprechen, wie ich das in meiner Begriffsschrift getan habe... Die Schwierigkeiten, die mit dem Gebrauch der Klassen verbunden sind, fallen weg, wenn man nur von Gegenständen, Begriffen und Beziehungen handelt, was in dem größten Teil der Lo- gik möglich ist. (BwJBem, s. 7).

Es ist hieraus einleuchtend, warum Frege die Durchführung eines sol- chen Beweises als unerlässlich für die Strenge eines logischen Systems ansah. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß seine Beweisfüh- rung durch seine Auffassung des Wahrheitswertes als der Bedeutung des Satzes sehr viel leichter, wenn nicht gar erst möglich gemacht wur- de, was ihn zu der folgenden Bemerkung in der Einleitung zu GGs I veranlasste:

Wie viel einfacher und schärfer durch die Einführung der Wahrheitswerte alles wird, kann nur eine eingehen- de Beschäftigung mit diesem Buche lehren. Diese Vor- teile allein schon legen ein großes Gewicht in die Waag- schale zu Gunsten meiner Auffassung, die freilich auf den ersten Blick befremden mag. (GGs I, s. X).

3. Die Funktion als Gegenstand

3.1 Neben seinem Funktionsbegriff führte Frege einen zweiten Urbegriff ein, der zwar von dem Funktionsbegriff abhängig ist, nicht aber durch ihn definierbar wäre. Dieser sein Begriff des Wertverlaufes einer Funktion wirft eine ganze Reihe von schwierigen Problemen auf, zu deren Klärung die scharfe Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen vorausgesetzt werden muß. Da eine solche Unterscheidung selbstverständlich nur aufgrund von Freges eigenen Angaben erfolgen kann, muß in voraus davor gewarnt werden, fremde Kategorien voreilig auf seine Begriffe zu übertragen; das richtige Verständnis des Funktionsbegriffes wurde von Anfang an durch nichts mehr gehemmt, als durch die eilfertige Anwendung schlechtbegründeter Theorien über den Inhalt und den Umfang, bzw. über die Intension und die Extension von Begriffen auf diesen Funktionsbegriff.

3.11 Die ersten Erläuterungen des Begriffes des Wertverlaufes einer Funktion sind zunächst wohl etwas dürftig:

Die Methode der analytischen Geometrie bietet nun ein Mittel, uns die Werte einer Funktion für verschiedene Argumente anschaulich zu machen. Indem wir nämlich das Argument als Zahlenwert einer Abscisse und den dazugehörigen Wert der Funktion als Zahlenwert der Ordinate eines Punktes betrachten, erhalten wir eine Gesamtheit von Punkten, die sich der Anschauung in den gewöhnlichen Fällen als Kurve darstellt. Jeder Kurvenpunkt entspricht einem Argumente mit dem zugehörigen Funktionswerte.

So gibt z. B.

$$y = x^2 - 4x$$

eine Parabel, wobei "y" den Wert der Funktion und den Zahlenwert der Ordinate ebenso andeutet, wie "x" das Argument und den Zahlenwert der Abscisse. Vergleichen wir hiermit die Funktion

$$x(x - 4)$$

so finden wir, daß sie allgemein für dasselbe Argument denselben Wert hat wie jene. Wir haben allgemein

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

welche Zahl auch für x genommen werde. Daher ist die Kurve, die wir aus

$$y = x^2 - 4x$$

erhalten, dieselbe, wie die aus

$$y = x(x - 4)$$

hervorgehende. Ich spreche das so aus: die Funktion $x(x - 4)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $x^2 - 4x$.

Wenn wir schreiben

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

so haben wir nicht eine Funktion der anderen, sondern nur die Funktionswerte einander gleichgesetzt; und wenn wir diese Gleichung so verstehen, daß sie gelten soll, was für ein Argument für x auch eingesetzt werden möge, so haben wir damit die Allgemeinheit einer Gleichung ausgedrückt. Wir können dafür aber auch sagen "der Wertverlauf der Funktion $x(x-4)$ ist gleich dem der Funktion $x^2 - 4x$ und haben darin eine Gleichung zwischen Wertverläufen. Daß es nun möglich ist, die Allgemeinheit einer Gleichung zwischen Funktionswerten als eine Gleichung aufzufassen, nämlich als eine Gleichung zwischen Wertverläufen, ist, wie es mir scheint, nicht zu beweisen, sondern muß als logisches Grundgesetz angesehen werden." (+ In manchen Wendungen der üblichen mathematischen Ausdrucksweise entspricht wohl das Wort Funktion dem, was ich hier Wertverlauf einer Funktion genannt habe. Aber Funktion in dem hier gebrauchten Sinn des Wortes ist das logisch frühere.) (FuB, s. 8 - 10).

Die Erläuterung aus den GGS I fügt wenig hinzu:

§ 3 Ich brauche die Worte "die Funktion $\Phi(\xi)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $\Psi(\xi)$ " allgemein als gleichbedeutend mit den Worten "die Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Wert".

Wir haben diesen Fall bei den Funktionen $\xi^2 = 4$ und $3 \cdot \xi^2 = 12$, wenigstens, wenn als Argumente Zahlen genommen werden. Wir können uns aber die Zeichen der Quadrierung und Multiplikation so definiert denken, daß die Funktion

$$(\xi^2 = 4) = (3 \cdot \xi^2 = 12)$$

für jedes beliebige Argument als Wert das Wahre hat. Hier kann nun auch ein Ausdruck der Logik gebraucht werden: der Begriff Quadratwurzel aus 4 hat denselben Umfang wie der Begriff etwas, dessen dreifaches Quadrat 12 ist. Bei solchen Funktionen, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist, kann man demnach statt "Wertverlauf der Funktion" sagen "Umfang des Begriffes". (GGG I, s. 7, 8).

Daß durch diese Erläuterung sehr wenig über die Beschaffenheit eines Wertverlaufes ausgesagt wird, war Frege wohl nicht entgangen:

Wir haben nun ein Mittel, einen Wertverlauf immer wiederzuerkennen, wenn er durch einen Namen wie " $\xi \Phi(\xi)$ " bezeichnet ist, durch welchen er schon als Wertverlauf erkennbar ist. (GGG I, s. 16).

Trotzdem behauptete er:

Die Einführung der Bezeichnung für die Wertverläufe scheint mir eine der folgenreichsten Ergänzungen meiner Begriffsschrift zu sein, die ich seit meiner ersten Veröffentlichung über diesen Gegenstand gemacht habe. (GGS I, s. 15, 16).

In der Begründung dieser Behauptung findet man einen besseren Aufschluß über die Wertverläufe, als in seinen Erläuterungen.

3.12 Wenn man nun schon Funktionen hat und mit ihnen eine nicht nur brauchbare, sondern auch sehr leistungsfähige Logik aufbauen kann, warum soll man eine Verdoppelung einführen und zu den Funktionen auch Gegenstände - die Wertverläufe der Funktionen - voraussetzen? In der Antwort auf diese Frage, also in der Erklärung der Rolle, welche die Wertverläufe zu spielen haben, liegt der Schlüssel zu ihrer Abgrenzung von den Funktionen:

Ich habe mich lange dagegen gesträubt, die Wertverläufe und damit die Klassen anzuerkennen; aber ich habe keine andere Möglichkeit gesehen, die Arithmetik logisch zu begründen. Es handelt sich dabei um die Frage: wie fassen wir logische Gegenstände? und ich habe keine andere Antwort darauf gefunden, als die: wir fassen sie als Umfänge von Begriffen, oder allgemeiner als Wertverläufe von Funktionen. Daß dies mit Schwierigkeiten verknüpft ist, habe ich nie verkannt... aber welchen anderen Weg hat man? (BwRussell, 28. VII. 1902).

Wenn es überhaupt logische Gegenstände gibt - und die Gegenstände der Arithmetik sind solche - so muß es auch ein Mittel geben, sie zu fassen, zu erkennen. Und dazu dient uns jenes logische Gesetz, das die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Gleichheit erlaubt. Ohne ein solches Mittel wäre eine wissenschaftliche Begründung der Arithmetik unmöglich. (GGS I, s. 149).

Der Grund, warum die Funktionen sich zu diesem Zweck nicht eignen, ist sehr einfach: Sie sind eben keine Gegenstände. Rein schreibtechnisch wäre ein solches Vorhaben nicht möglich:

Wir können für einen Wertverlauf ein einfaches Zeichen setzen, und so wird z. B. der Name der Anzahl Null eingeführt werden. In " $\Phi(u)$ " = " $\mathfrak{I}(u)$ ", dagegen können wir nicht für " $\mathfrak{I}(u)$ " ein einfaches Zeichen setzen, weil der Buchstabe " u " immer in dem Vorkommen muß, was etwa für " $\Phi(u)$ " gesetzt wird. (GGS I, s. 14).

Es muß aber betont werden, daß dies nicht nur ein Problem für die Arithmetik allein ist:

Man kann sich auch so zu helfen suchen, und das habe ich in meinen Grundlagen der Arithmetik angedeutet. Wenn

man eine Beziehung $\Phi(\xi, \zeta)$ hat, von der die Sätze gelten: 1. aus $\Phi(a, b)$ folgt $\Phi(b, a)$; 2. aus $\Phi(a, b)$ und $\Phi(b, c)$ folgt $\Phi(a, c)$; so kann man diese Beziehung in eine Gleichheit (Identität) umsetzen und für " $\Phi(a, b)$ " schreiben etwa " $\$a = \b ". Wenn die Beziehung z.B. die der geometrischen Ähnlichkeit ist, so kann man für " a ist ähnlich dem b " sagen " $\text{die Gestalt von } a \text{ ist dieselbe wie die Gestalt von } b$ ". Vielleicht nennen sie das " $\text{Definition par Abstraction}$ ". Die Schwierigkeiten sind hierbei aber dieselben, wie bei der Umsetzung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit. (BwRussell, 28. VII. 1902).

In der Tat liegt die einzige umfassende Begründung aller solchen Definitionen per Abstraktion in der Annahme logischer Gegenstände, von denen ein dem Frege'schen mindestens analoges Gesetz gilt. Er fühlte sich in seiner Annahme also nicht unberechtigt; darüber hinaus fühlte er sich nicht allein:

Daß man von der erwähnten Möglichkeit der Umsetzung eigentlich schon immer Gebrauch gemacht hat, ist ja klar; nur hat man das Zusammenfallen von den Funktionen selbst statt von den Wertverläufen ausgesagt. Wenn eine erste Funktion für dasselbe Argument allgemein denselben Wert hat, wie eine Zweite, pflegt man wohl zu sagen: " $\text{die erste Funktion ist dieselbe wie die zweite}$ " oder " $\text{beide Funktionen fallen zusammen}$ ". Wiewohl der Ausdruck von unserem abweicht, so ist doch auch hier die Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Gleichheit umgesetzt.⁺ (+ Ebenso werden sich die wenigsten Mathematiker besinnen, den Umstand, daß $f(\xi)$ für dasselbe Argument immer denselben Wert hat wie die Funktion $g(\xi)$, auszudrücken durch " $f = g$ ". Der hier allerdings enthaltene Fehler entspringt aus einer mangelhaften Auffassung des Wesens der Funktion. Ein isolierter Funktionsbuchstabe ohne Argumentstelle ist ja ein Unding, ebenso wie ein isoliertes Funktionszeichen wie " $\sin$ " ein Unding ist. Denn das Kennzeichnende der Funktion im Vergleich mit dem Gegenstande ist ja eben die Ungesättigtheit, daß sie der Ergänzung durch ein Argument bedarf, und dies muß auch in der Bezeichnung hervortreten. Die Unzulässigkeit einer solchen Bezeichnung wie " $f = g$ " geht daraus hervor, daß sie in besonderen Fällen sofort versagt. Setzen wir für $f(\xi)$ z.B. $\xi^2 = 1$ und für $g(\xi)$ z.B. $(\xi - 1)(\xi + 1)$, so fällt in die Augen, daß man nichts der Gleichung " $f = g$ " Entsprechendes hinschreiben kann. Wenn aber die Bezeichnungsweise in Ordnung ist, muß es immer möglich sein, einen solchen Übergang vom Allgemeinen zum Besonderen in den Zeichen zu vollziehen. Wenn demnach die Bezeichnung " $f = g$ " auch nicht als richtig anerkannt werden kann, so zeigt sie doch, daß die Mathematiker von der Möglichkeit unserer Umsetzung schon Gebrauch gemacht haben.) (GGs II, s. 148).

Diese Ausführungen in der Fußnote sind ganz erheblich in Bezug auf die richtige Unterscheidung zwischen Funktionen und ihren Wertverläufen, was vielleicht deutlicher aus der folgenden Stelle hervorgeht, wo er dieselbe Problematik behandelte:

Die Isolierung des Funktionszeichens widerspricht dem Wesen der Funktion, die in ihrer Ungesättigtheit besteht. Dadurch eben unterscheidet sich die Funktion vom Gegenstande. Darum müssen sich auch die Funktionsnamen von den Eigennamen wesentlich unterscheiden und zwar dadurch, daß sie mindestens eine leere Stelle - Argumentstelle - mit sich führen. Und diese Argumentstellen müssen bei einem Funktionsnamen immer erhalten und als solche kenntlich bleiben; sonst wird der Funktionsname zu einem bedeutungslosen Eigennamen. Dasselbe muß von den Funktionsbuchstaben wenigstens überall da gelten, wo sie durch Funktionsnamen ersetzbar sein sollen. Ich lasse daher auf den lateinischen Funktionsbuchstaben immer eine Klammer folgen, deren Innenraum die Argumentstellen enthält. . . Mit ihren Bezeichnungen " $\varphi C \psi$ " und " $\varphi || \psi$ " kommen wir sofort in Verlegenheit, wenn wir zu besonderen Funktionen übergehen. Wir haben z. B. nach der in Ihrem Brief benutzten Bezeichnung " $x^2 = 1$ " $\supset_x \cdot x(x-1)(x+1) = 0$ " analog ihrem " $\varphi x \supset_x \psi x$ "; aber wir haben nichts, was ihrem " $\varphi C \psi$ " analog wäre. Dazu müssen wir erst alle Funktionsnamen (Namen von Funktionen erster Stufe mit einem Argumente) so umgestalten, daß wir nureine Argumentstelle hätten, und daß diese sich rechts befände. Wir müßten also z. B. " $x^2 = 1$ " umgestalten, etwa in " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)x$ " und " $x(x-1)(x+1) = 0$ " in " $\epsilon[\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon+1) = 0]x$ ", so daß wir schreiben können " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)x \supset_x \epsilon[\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon+1) = 0]x$ " und dafür nach Ihrer Definition

$$"\epsilon(\epsilon^2 = 1)C \epsilon[\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon+1) = 0]".$$

Aber diese Schreibung ergäbe dieselben Schwierigkeiten, wie meine Wertverlaufsbezeichnung, dazu aber noch eine neue, denn der Wertverlauf soll einen Gegenstand und sein Name ein Eigenname sein; aber " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)$ " sollte ein Funktionsname sein, der eine Ergänzung durch das folgende Zeichen forderte. " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)1$ " wäre gleichbedeutend mit " $1^2 = 1$ " und demnach müßte " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)$ " gleichbedeutend sein mit " $^2 = 1$ ", was aber bedeutungslos wäre. " $\epsilon(\epsilon^2 = 1)$ " wäre nur in Verbindung mit einem folgenden Argumentszeichen erklärt und würde trotzdem ohne ein solches gebraucht; es wäre als Funktionszeichen erklärt und als Eigenname gebraucht, was nicht angeht.

In Ihren Bezeichnungen " $\varphi || \psi$ " und " $\varphi = \psi$ " sind " φ " und " ψ " nicht mehr als Funktionsbuchstaben, sondern als Gegenstandsbuchstaben gebraucht. Mit der vorhin angenommenen Schreibweise hätten wir " $\epsilon(\epsilon^2 = 1) = \epsilon[(\epsilon-1)(\epsilon+1) = 0]$ " was sich von meinem " $\epsilon(\epsilon^2 = 1) = \epsilon[(\epsilon-1)(\epsilon+1) = 0]$ " nur unwesentlich unterscheidet.
(BwRussell, 13. XI. 1904).

Die auffallende Ähnlichkeit der von Frege vorgeschlagenen Schreibweise mit der des heute gebräuchlichen Lambda-operators macht die grundlegende Tatsache nur deutlicher: Seine Wertverläufe sind nicht mehr als eine Vergegenständlichung, der an sich nicht gegenständlichen Funktionen; alle solchen Vergegenständlichungen der Funktionen sind untereinander gleichwertig - die Unterschiede in deren Schreibweise entsprechen keinen Unterschieden in der Sache selbst. Der Wertverlauf einer Funktion ist nur die Funktion als Gegenstand aufgefaßt.

3.2 Dieser Unterschied zwischen einer Funktion und ihrem Wertverlauf, der also auf der grundlegenden Verschiedenheit der Funktionen von den Gegenständen beruht, darf auf keinen Fall mit dem Unterschiede zwischen dem Sinn und der Bedeutung eines Wortes verwechselt werden. Es ist schlechthin unmöglich, das, was Frege unter "Funktion" versteht, als den Sinn eines Wortes aufzufassen, dessen Bedeutung das wäre, was er unter "Wertverlauf einer Funktion" versteht - würde selbst seine eigene Rede von "Begriff" und "Umfang eines Begriffes" dazu verleiten. Diese Verwechslung hat er schon damals abwehren wollen:

Es kann nun leicht Unklarheit dadurch entstehen, daß man die Einteilung in Begriffe und Gegenstände mit der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung so vermengt, daß man Sinn und Begriff einerseits zusammenfließen läßt. Jedem Begriffsworte oder Eigennamen entspricht in der Regel ein Sinn und eine Bedeutung, so wie ich diese Wörter gebrauche. ... Die Bedeutung eines Eigennamens ist der Gegenstand, den er bezeichnet oder benennt. Ein Begriffswort bedeutet einen Begriff, wenn das Wort so gebraucht wird, wie es in der Logik zweckmäßig ist. Um dies zu erklären, erinnere ich an einen Umstand, der sehr zu Gunsten der Logiker des Umfanges gegen die des Inhaltes zu sprechen scheint, daß nämlich unbeschadet der Wahrheit, in jedem Satze Begriffswörter einander vertreten können, wenn ihnen derselbe Begriffsumfang entspricht, daß also auch in Beziehung auf das Schließen und für die logischen Gesetze Begriffe nur insofern sich verschieden verhalten, als ihre Umfänge verschieden sind. Die logische Grundbeziehung ist die des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff: auf sie lassen sich alle Beziehungen zwischen Begriffen zurückführen. Indem ein Gegenstand unter einen Begriff fällt, fällt er unter alle Begriffe desselben Umfanges, woraus das Gesagte folgt. Wie also Eigennamen desselben Gegenstandes unbeschadet der Wahrheit einander vertreten können, so gilt dasselbe auch von Begriffswörtern, wenn der Begriffsumfang derselbe ist. Freilich wird sich bei solchen Ersetzungen der Gedanke ändern. Dieser ist aber der Sinn des Satzes, nicht dessen Bedeutung.⁺ (+ Vgl. meinen Aufsatz über Sinn und Bedeutung.) Dieser aber, nämlich der Wahrheitswert bleibt ungeändert. Man könnte

so leicht dahin kommen, den Begriffsumfang für die Bedeutung des Begriffswortes auszugeben; aber hierbei würde man übersehen, daß Begriffsumfänge Gegenstände und nicht Begriffe sind. (AuSüB, s. 1, 2).

Daran ist einiges hervorzuheben: erstens paßt diese Auffassung ganz in den Rahmen von Freges Semantik hinein. Zweitens ist dadurch der Begriffsumfang (die Klasse) als Bedeutung des Prädikates ausgeschlossen: der Begriffsumfang ist ein Gegenstand (das, wessen Ausdruck keine leeren Stellen mit sich trägt) und deswegen kein Begriff (etwas, dessen Ausdruck eine leere Stelle mit sich trägt). Auch derjenige, der Freges Terminologie für ungeeignet hält, kann nicht leugnen, daß hier ein echter Unterschied besteht. Drittens ist seine Behauptung der Extensionalität an Prädikaten des Betonens wert: ganz allgemein, abgesehen von Wertverläufen (und also von Klassen) dürfen Namen von Funktionen, die für dasselbe Argument immer denselben Wert haben, unbeschadet der Wahrheit füreinander ersetzt werden. Begriffsschriftlich:

$$\begin{array}{l} \text{---} m_p f(\beta) = m_p g(\beta) \\ \text{---} \quad \quad \quad \alpha \quad f(\alpha) = g(\alpha) \end{array}$$

Man wird deswegen vergeblich versuchen, das was Frege Begriff nannte, irgendwie mit Inhalt, Intension, Sinn usw. zu verbinden. Man muß dies im Auge behalten, wenn man das folgende Zitat richtig bewerten will, in dem Frege eine intensionale Logik ablehnt:

Wenn wir nun dies alles im Auge behalten, sind wir wohl imstande zu behaupten "Was zwei Begriffswörter bedeuten, ist dann und nur dann dasselbe, wenn die zugehörigen Begriffsumfänge zusammenfallen" ohne durch den uneigentlichen Gebrauch des Wortes "dasselbe" zu Fehlern verleitet zu werden. Und damit ist den Umfangslogikern wie ich glaube, ein bedeutendes Zugeständnis gemacht. Sie haben recht, wenn sie durch ihre Vorliebe für den Begriffsumfang gegenüber dem Begriffsinhalt zu erkennen geben, daß sie die Bedeutung der Worte als das Wesentliche für die Logik ansehen, nicht den Sinn. Die Inhaltslogiker bleiben nur zu gerne beim Sinne stehen; denn, was sie Inhalt nennen, ist, wenn nicht gar Vorstellung, so doch Sinn. Sie bedenken nicht, daß es in der Logik nicht darauf ankommt, wie Gedanken aus Gedanken hervorgehen ohne Rücksicht auf den Wahrheitswert, daß der Schritt vom Gedanken zum Wahrheitswert, daß allgemeiner der Schritt vom Sinne zur Bedeutung getan werden muß; daß die logischen Gesetze zunächst Gesetze im Reich der Bedeutungen sind und sich erst mittelbar auf den Sinn beziehen. Wenn es einem auf die Wahrheit ankommt - und auf die Wahrheit zielt die Logik hin - muß man auch nach den Bedeutungen fragen, muß man Eigennamen verwerfen, welche keinen Gegenstand bezeichnen oder benennen,

wiewohl sie einen Sinn haben mögen; muß man Begriffswörter verwenden, die keine Bedeutung haben. Das sind nicht etwa solche, die Widersprechendes vereinigen - denn ein Begriff kann recht wohl leer sein - sondern solche, bei denen die Umgrenzung verschwommen ist. (AuSUB, s. 6, 7).

Man kann also sowohl an den Namen eines Begriffes (einer Funktion) wie auch an den Namen einer Klasse (des Wertverlaufes einer Funktion) die Unterscheidung zwischen Bedeutung und Sinn vornehmen, so daß die Bedeutungen in beiden Fällen irgendwie dem entspricht, was man unter "Extension" bzw. "Umfang" des Begriffes versteht, während der Sinn seinerseits dem entspricht, was man unter "Intension" bzw. "Inhalt" des Begriffes versteht; nur sind die Bedeutungen in beiden Fällen verschieden: der Klassenname bedeutet einen Gegenstand, so daß man in diesem Fall wohl sagen kann, seine Bedeutung ist die Klasse bzw. der Umfang des Begriffes, während der Begriffsname keinen Gegenstand bedeutet, so daß man eigentlich nicht einmal von der Bedeutung des Begriffsnamens reden kann, wenn diese Redewendung so aufgefaßt würde, als ob das, was der Begriffsname bedeutet, ein Gegenstand wäre.

3.21 Eine unangemessene Sprechweise kann sehr leicht den Unterschied zwischen einer Funktion und ihrem Wertverlauf bzw. zwischen einem Begriff und seinem Umfang (seiner Klasse) verwischen:

Dies Wesen des Begriffes ist nur ein großes Hindernis für den sachgemäßen Ausdruck und für die Verständigung. Wenn ich von einem Begriff reden will, zwingt mir die Sprache mit kaum entrinnbarer Gewalt einen unpassenden Ausdruck auf, wodurch der Gedanke verdunkelt - fast könnte ich sagen, verfälscht - wird. Wenn ich sage "der Begriff gleichseitiges Dreieck", so sollte man nach der sprachlichen Analogie annehmen, daß ich damit einen Begriff bezeichne, so wie ich ohne Zweifel einen Planeten benenne, wenn ich sage "der Planet Neptun". Aber dies ist nicht der Fall; denn es fehlt die prädikative Natur. Daher ist die Bedeutung des Ausdruckes "der Begriff gleichseitiges Dreieck" (sofern eine vorhanden ist) ein Gegenstand. (AuSuB, s. 3).

Es ist zum genauen Verständnis der Begründung der Logik auf den Funktionsbegriff statt auf den Klassenbegriff, wie auch zum Verständnis der Semantik der Funktionsnamen durchaus unentbehrlich, daß man nicht über diese Tücke der Sprache stolpert. Dagegen ist ein solches Stolpern keineswegs nötig: damals als ein solches Mißverständnis zum ersten Mal seitens B. Kerry auftrat, begegnete ihm Frege in seinem Aufsatz BuG mit größter Klarheit, so daß seine Ausführungen darin als wesentlicher

Bestandteil seiner Lehre von der Funktion eingestuft werden müssen. Da diese Verwechslung immer noch vorkommt und da Aufklärung darüber zur Erläuterung seines Standpunktes dienlich ist, dürfte es angebracht sein, die Problematik näher zu belegen:

Es kann ja nicht verkannt werden, daß hier freilich unvermeidliche sprachliche Härte vorliegt, wenn wir behaupten: der Begriff Pferd ist kein Begriff¹ (+ Ähnliches kommt vor, wenn wir mit Beziehung auf den Satz "diese Rose ist rot" sagen: das grammatische Prädikat "ist rot" gehört zum Subjekte "diese Rose". Hier sind die Worte "das grammatische Prädikat 'ist rot'" nicht grammatisches Prädikat, sondern Subjekt. Gerade dadurch, daß wir es ausdrücklich Prädikat nennen, rauben wir ihm diese Eigenschaft.), während doch z.B. die Stadt Berlin eine Stadt und der Vulkan Vesuv ein Vulkan ist. Die Sprache befindet sich hier in einer Zwangslage, welche die Abweichung vom Gewöhnlichen rechtfertigt. Daß unser Fall ein besonderer ist, deutet Kerry selbst durch die Anführungszeichen beim Worte "Pferd" an - ich gebrauche zu demselben Zweck gesperrte Schrift. Es lag kein Grund vor, die Wörter "Berlin" und "Vesuv" in ähnlicher Weise auszuzeichnen. Man hat bei logischen Untersuchungen nicht selten das Bedürfnis, etwas von einem Begriffe auszusagen und dies auch in die gewöhnliche Form für solche Aussagen zu kleiden, daß nämlich die Aussage Inhalt des grammatischen Prädikats wird. Danach würde man als Bedeutung des grammatischen Subjektes den Begriff erwarten; aber dieser kann wegen seiner prädikativen Natur nicht ohne Weiteres so erscheinen, sondern muß erst in einen Gegenstand verwandelt werden, oder, genauer gesprochen, er muß durch einen Gegenstand... vertreten werden, den wir mittels der vorgesetzten Worte "der Begriff" bezeichnen, z. B.

"der Begriff Mensch ist nicht leer".

Hier sind die ersten drei Worte als Eigenname... aufzufassen, der ebensowenig prädikativ gebraucht werden kann, wie etwa "Berlin" oder "Vesuv". Wenn wir dagegen sagen: "Jesus fällt unter den Begriff Mensch", so ist das Prädikat (von der Kopula abgesehen)

"fallend unter den Begriff Mensch"

und das bedeutet dasselbe wie

"ein Mensch".

[Dieses Prädikat] ist aber [von der] Wortverbindung

"der Begriff Mensch"

nur ein Teil.

Man könnte gegen die prädikative Natur des Begriffes geltend machen, daß doch von einem Subjektsbegriffe gesprochen werde. Aber auch in solchen Fällen, wie z. B. in dem Satze

"alle Säugetiere haben rotes Blut"

ist die prädikative Natur⁺ (+ Was ich hier prädikative Natur des Begriffes nenne, ist nur ein besonderer Fall der Ergänzungsbedürftigkeit oder Ungesättigtheit, die ich in meiner Schrift Funktion und Begriff (Jena 1891) als wesentlich für die Funktion angegeben habe. Dort ließ sich der Ausdruck "die Funktion $f(x)$ " nicht wohl vermeiden, obwohl auch dort die Härte entstand, daß die Bedeutung dieser Worte keine Funktion ist) des Begriffes nicht zu verkennen; denn man kann dafür sagen:

"was Säugetier ist, hat rotes Blut",

oder

"wenn etwas ein Säugetier ist, so hat es rotes Blut".

(BuG, s. 196-198).

Es geht aus dieser Stelle eine wichtige Kenntnis über Freges Wortgebrauch mit Deutlichkeit hervor: Er benützt nämlich die Worte:

"der Begriff Mensch"

"der Umfang des Begriffes Mensch"

"die Klasse der Menschen"

alles als sinnes- und bedeutungsgleich, und demnach auch die Sätze

"Sokrates ist ein Mensch"

"Sokrates fällt unter den Begriff Mensch"

"Sokrates gehört (ist Element) der Klasse der Menschen an".

Dabei leugnete er nicht, daß dies aus seinem Gebrauch des Wortes "Begriff" hervorgeht:

Wenn nun Kerry mein Kennzeichen unzutreffend nennt [wobei der bestimmte Artikel auf einen Gegenstand deutet], indem er behauptet, in dem Satze "der Begriff, von dem ich jetzt eben spreche, ist ein Individualbegriff" bedeute der aus den ersten acht Wörtern bestehende Name sicherlich einen Begriff, so versteht er das Wort "Begriff" nicht in meinem Sinne, und der Widerspruch liegt nicht in meinen Festsetzungen. Niemand kann aber verlangen, daß meine Ausdrucksweise mit der Kerrys übereinstimmen müsse. (BuG, s. 196).

Ich bestreite Kerry durchaus nicht das Recht, die Wörter "Begriff" und "Gegenstand" in seiner Weise zu gebrauchen, möchte mir aber das gleiche Recht wahren und behaupten, daß ich mit meiner Bezeichnung einen Unterschied von der höchsten Wichtigkeit gefaßt habe. (BuG, s. 204).

Frege hält also seinen Wortgebrauch für begründet, und zwar in einem

wichtigen Unterschiede. Dieser Unterschied muß ferner berücksichtigt werden: das heißt, auf den Funktionsbegriff (in seinem Sinne) kann nicht verzichtet werden. Diese Lehre, die das Fundament seines Prioritätsanspruches für die Funktion über die Klasse legte, versah er mit einer schlichten Begründung, die eigentlich das letzte Wort in diesem Streit hätte sein müssen:

Man denkt vielleicht, diese Schwierigkeit sei künstlich gemacht, man brauche etwas so unhandliches wie das, was ich Begriff genannt habe, gar nicht in Betracht ziehen, und könne mit Kerry das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff als eine Beziehung ansehen, in welcher das einmal als Gegenstand erscheinen könne, was ein andermal als Begriff auftrete. Die Wörter "Gegenstand" und "Begriff" dienten dann nur dazu, die verschiedene Stellung in der Beziehung anzudeuten. Das kann man tun; wer aber hiermit die Schwierigkeit vermieden glaubt, irrt sehr. Sie ist nur verschoben; denn von den Teilen eines Gedankens dürfen nicht alle abgeschlossen sein, sondern mindestens einer muß irgendwie ungesättigt oder prädikativ sein, sonst würden sie nicht aneinander haften. So haftet z. B. der Sinn der Wortverbindung "die Zahl 2" nicht an dem des Ausdrucks "der Begriff Primzahl" ohne ein Bindemittel. Ein solches wenden wir an in dem Satze "die Zahl 2 fällt unter den Begriff Primzahl". Es ist enthalten in den Worten "fällt unter", die in doppelter Weise einer Ergänzung bedürfen: durch ein Subjekt und einen Akkusativ; und nur durch diese Ungesättigtheit ihres Sinnes sind sie fähig als Bindemittel zu dienen. Erst wenn sie in dieser doppelten Hinsicht ergänzt sind, haben wir einen abgeschlossenen Sinn, haben wir einen Gedanken. Ich sage von solchen Worten oder Wortverbindungen, daß sie eine Beziehung bedeuten. Nun haben wir bei der Beziehung dieselbe Schwierigkeit, die wir bei dem Begriff vermeiden wollten; denn mit den Worten "die Beziehung des Falles eines Gegenstandes unter einen Begriff" bezeichnen wir keine Beziehung, sondern einen Gegenstand, und die drei Eigennamen "die Zahl 2", "der Begriff Primzahl", "die Beziehung des Falles eines Gegenstandes unter einen Begriff" verhalten sich ebenso spröder zu einander, wie die beiden ersten allein; wie wir sie auch zusammenstellen, wir erhalten keinen Satz. So erkennen wir leicht, daß die Schwierigkeit, welche in der Ungesättigtheit eines Gedankenteils liegt, sich wohl verschieben, aber nicht vermeiden läßt.

(BuG, s. 204, 205).

Daß man also durch die Annahme einer einzigen Beziehung sonst auf Funktionen zugunsten von deren Wertverläufen (Klassen) verzichten kann, darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß jene Beziehung selber kein Wertverlauf ist, sondern eine Funktion im ursprünglichen Frege'schen Sinne des Wortes. Darüber hinaus wird man auch, wenn es bei einem solchen Aufbau darum geht, aus gegebenen Klassen neue zu gewinnen (aus gegebenen Klassen-

namen durch Zusammensetzung neue zu erhalten - das Hauptziel einer *lingua characteristica*), wieder auf den Funktionsbegriff zurückkommen müssen: zwar kann man dann sagen, daß das " $\Phi(\xi)$ " in einem Ausdruck wie " $\hat{\lambda} \Phi(\lambda)$ " bzw. " $\lambda_x \Phi(x)$ " keine selbständige Bedeutung habe, aber wenn die Festsetzungen über solche Zeichen nach den Anforderungen der Logik gemacht werden, dann müßte jeder solche Name " $\Phi(\xi)$ " genau das sein, was Frege "den bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe" nannte - er muß zusammen mit jedem bedeutungsvollen Eigennamen wiederum einen bedeutungsvollen Namen bilden: sonst sind jene Festsetzungen eben nicht korrekt. (Es ist in dieser Hinsicht eigentlich verwunderlich, daß man bei einem solchen Aufbau nicht eher darauf gekommen war, den Nachweis zu erbringen, daß jeder rechtmäßig gebildete Ausdruck eine Bedeutung hat, da die Gültigkeit von wesentlichen Festsetzungen offensichtlich darauf beruht. Es ist auch kein Ersatz dafür, wenn man seine Festsetzungen "Definitionen" nennt, da, wie oben erläutert, eine Definition, in der ein bekanntes Zeichen im Definiendum vorkommt, den Nachweis der Widerspruchsfreiheit erfordert, was auf dasselbe hinausläuft.)

3.3 Die Hinzunahme logischer Gegenstände, die durch Funktionen gegeben sind, zu seiner Begriffsschrift, erwies sich für Freges Unternehmen als verhängnisvoll, wie er selber später ernüchtert feststellen mußte:

Ich habe mich nur schwer zur Einführung der Klassen oder Begriffsumfänge entschlossen, weil mir die Sache nicht ganz sicher schien und, wie sich gezeigt hat, mit Recht. Nur weil ich, um die Zahlen zu behandeln, eines Mittels bedurfte, Gegenstände einzuführen auf rein logischem Wege, entschloß ich mich den Übergang von den Begriffen (die Funktionen sind) zu den Begriffsumfängen oder Klassen, die Gegenstände sind, zuzulassen. Und nachdem ich mich einmal dazu entschlossen hatte, machte ich nun von den Klassen einen ausgedehnteren Gebrauch als nötig gewesen wäre, weil sich damit manche Vereinfachung erzielen ließe. Freilich habe ich dabei den Fehler gemacht, meine ursprünglichen Bedenken zu leicht hin fahren zu lassen, im Vertrauen darauf, daß von Begriffsumfängen schon lange die Rede gewesen ist. (BwJBern, S. 7).

Der ausgedehntere Gebrauch, von dem er redet, lag darin, daß er mittels der Wertverläufe Funktionen höherer Stufe durch Funktionen erster Stufe ersetzen konnte, weil er eine dem Enthalten-sein-in-einer-Klasse entsprechende Funktion definieren, und mit ihr ein Komprehensionsaxiom ableiten konnte. Sein Unbehagen über diesen Schritt, dem er schon im

Vorwort zu GGS I Ausdruck gegeben hat

Ein Streit kann hierbei, soviel ich sehe, nur um mein Grundgesetz der Wertverläufe (V) entbrennen, das von den Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt. Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muß. (GGS I, s. VIII).

war nicht unberechtigt, wie er gerade im Nachwort zum zweiten Band desselben Werkes bestätigen mußte:

Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In dieser Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte. Es handelte sich hierbei um mein Grundgesetz (V). Ich habe mir nie verhehlt, daß es nicht so einleuchtend ist, wie die anderen, und wie es eigentlich von einem logischen Gesetz verlangt werden muß. Und so habe ich denn auch im Vorworte zum ersten Bande, s. VII auf diese Schwäche hingewiesen. Ich hätte gerne auf diese Grundlage verzichtet, wenn ich irgendeinen Ersatz dafür gekannt hätte...

Alle die von Begriffsumfängen, Klassen, Mengen... in ihren Beweisen Gebrauch gemacht haben, sind in derselben Lage. Es handelt sich hierbei nicht um meine Begründungsweise im Besonderen, sondern um die Möglichkeit einer logischen Begründung der Arithmetik überhaupt.

Doch zur Sache selbst! Herr Russell hat einen Widerspruch aufgefunden...
(GGS II, s. 253).

Zu diesem Widerspruch gibt es Einiges zu sagen: am wichtigsten ist, daß es sich hier nicht bloß um einen Widerspruch handelt, sondern um ganze Familien von je endlos vielen Widersprüchen. Es ist nicht allgemein bekannt, daß man, wenn man die Einerklasse einer Klasse ihre eigene Einerklasse nennt, aus der Klasse aller Einerklassen von Klassen, denen die eigene Einerklasse nicht angehört und ihrer eigenen Einerklasse in genau derselben Weise einen Widerspruch ableiten kann, wie aus der Klasse aller Klassen, die sich selbst nicht angehören. Nenne man z. B. ferner die Klasse aller Klassen, denen eine gegebene Klasse angehört, die Eigenschaftsklasse jener Klasse, so ist auch die Klasse aller Eigenschaftsklassen von Klassen, denen die eigenen Eigenschaftsklassen nicht angehören, zusammen mit ihrer eigenen Eigenschaftsklasse widerspruchsvoll. Es gibt viele Variationen dieser Art, u. a. aus der Klasse aller Nicht-Eigenschaften einer gegebenen Klasse wie auch aus der Klasse aller Gegenstände, die mit der gegebenen Klasse nicht identisch sind; es können sogar aus jeder Funktion, die für verschiedene Argumente immer verschiedene Werte hat, solche

Variationen gebildet werden. Ferner ist aber zu jeder solchen Stammwiderspruchsklasse auch jede Klasse widerspruchsvoll, die dadurch erhalten wird, daß man die Stammklasse vermindert oder vermehrt (oder beides zugleich) um beliebig viele Gegenstände, zu denen die daraus erhaltene Klasse einwandfrei nicht gehört: das sind jeweils endlos viel Klassen zu jeder Stammklasse. Alle diese Widersprüche können sowohl in dem breiteren System Freges wie auch in einem Teilsystem ohne Funktionen dritter Stufe, aber mit einem Komprehensionsaxiom, von der Art wie

$$\vdash a \cap \epsilon f(\epsilon) = f(a) \quad [a \in \hat{x} f x \equiv f(a)]$$

abgeleitet werden.

Es darf vielleicht hier eingewendet werden, daß diese Ausführungen ohne besonderen Wert sind, da bekanntlich in einem widerspruchsvollen System ohnehin alles abgeleitet werden kann, zu jedem Satz auch seine Negation. Nun kann daraus, daß alle widerspruchsvollen Systeme in der Anwendung gleich wertlos sind nicht geschlossen werden, daß sie alle gleich sind, und der Erkenntniswert irgendwelcher Unterschiede zwischen ihnen kann nicht von vorneherein als geringfügig hingestellt werden. Solange es bei einer Ableitung möglich ist, festzustellen, ob die Ableitung über einen Widerspruch erfolgt ist oder nicht, kann eine solche Feststellung der Erkenntnis dienen. (Es ist z. B. die leicht übersehene Tatsache nicht ohne Wert, daß es in einem System, wie dem von Frege, ohne über einen Widerspruch zu gehen, nicht möglich ist, abzuleiten, ob die Klasse aller sich selbst angehörenden Klassen eine Klasse ist, die sich selbst angehöre oder nicht.) Nun werden die Widersprüche aus den Stammklassen in den angeführten Beispielen zwar parallel zueinander, nicht aber eines mittels eines anderen abgeleitet (sie könnten selbstverständlich auch eines mittels eines anderen abgeleitet werden), und es ist keineswegs zu erwarten, daß eine Änderung der Bedeutungsfestsetzungen über Wertverlaufs- bzw. Klassenbezeichnungen und mithin der sich daraus ergebenden Axiome, welche geeignet wäre, die Ableitung eines dieser Widersprüche auszuschalten, auch gleich alle anderen beseitigen würde. Frege selber, und möglicherweise nicht er allein, hat sich in dieser Weise getäuscht; er schlug im Nachwort zu GGs II eine Änderung seines Axiomes V vor, aus der zwar Widersprüche der einfachen Kategorie nicht direkt abgeleitet werden können, alle anderen aber spielend leicht. Diesem Irrtum hätte er übrigens gar nicht zu erliegen brauchen; denn er hat selber in GGs I darauf hingewiesen:

Nehmen wir an, es sei

$$\chi(\xi)$$

eine Funktion, welche niemals denselben Wert für verschiedene Argumente erhält, so gilt für die Gegenstände, deren Namen die Form " $\chi(\xi\Phi(\epsilon))$ " haben, ganz dasselbe Kennzeichen zur Wiedererkennung wie für die Gegenstände, deren Zeichen die Form " $\xi\Phi(\epsilon)$ " haben. Es ist dann nämlich auch " $\chi(\xi\Phi(\epsilon)) = \chi(\xi\Psi(\epsilon))$ " gleichbedeutend mit " $\Phi(u) = \Psi(u)$ ".
 GGS XX 1, s. 16).

Er hat ferner im Nachwort zu GGs II, um die Unverträglichkeit seines Axiomes V mit den übrigen nachzuweisen, aus den ersten vier Axiomen allein ein Gesetz abgeleitet, das besagt:

Für jede Funktion zweiter Stufe mit einem Argument zweiter Art gibt es Begriffe, welche, als deren Argumente genommen, denselben Wert ergeben, obwohl nicht alle Gegenstände, die unter den einen dieser Begriffe fallen, auch unter den andern fallen.
 (GGs II, s. 260).

Statt dessen könnte man sagen: es darf keine Funktionskontexte im System geben der Art, daß daraus, daß zwei verschiedene Funktionsnamen in diesen Kontext denselben Wert ergeben, geschlossen werden könnte, daß die Funktionen für dasselbe Argument immer denselben Wert haben. Dies zusammen mit dem Gesagten über Funktionen, die für verschiedene Argumente immer verschiedene Werte haben, reicht hin, um die Unzulänglichkeit seines Änderungsvorschlages deutlich zu machen, der auf der falschen, angesichts seiner Kenntnisse rätselhaften Annahme beruhte, "daß der Begriffsumfang selbst den Ausnahmefall bewirkt".

Sein Beweis der Unverträglichkeit seines Axiomes V mit den übrigen ist insofern interessant, als man bekanntlich bei dem Auftreten einer Antinomie die Unverträglichkeit beliebiger zu ihrer Ableitung verwendeter Annahmen mittels der Antinomie selbst und dem indirekten Beweisverfahren leicht aufzeigen kann - eine Methode, deren Universalität ihren Erkenntniswert erheblich vermindert. Frege sagte dazu:

Unser Beweis ist geführt worden ohne Benutzung von Sätzen oder Bezeichnungen, deren Berechtigung irgendwie zweifelhaft wäre.
 (GGs II, s. 260).

Diese Behauptung ist natürlich nur so viel wert, wie diejenigen Kriterien wert sind, nach denen die Behauptung gerechtfertigt wird. In seinem Fall wurde sein Beweis innerhalb eines Teilsystems geführt, für das nachge-

gewiesen werden kann, daß alle rechtmäßig gebildeten Ausdrücke bedeutungsvoll sind, was doch ein Kriterium ist. Es erhebt sich aber die Frage, wie es dann mit einem solchen Nachweis im Bezug auf seine Wertverlaufsbezeichnung steht. Wäre sein Nachweis diesbezüglich richtig gewesen, dann wären Widersprüche ausgeschlossen, so daß man erwarten würde, er hätte seine Aufmerksamkeit damals sofort darauf gerichtet. In der Tat war das auch seine erste Reaktion:

Ihre Entdeckung des Widerspruches hat mich aufs höchste überrascht, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen dachte, ins Wanken gerät. Es scheint danach, daß die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit (§ 9 meiner Grundgesetze) nicht immer erlaubt ist, daß mein Gesetz V (§ 20, s. 36) falsch ist, und daß meine Ausführungen in § 31 nicht genügen, in allen Fällen meinen Zeichenverbindungen eine Bedeutung zu sichern. Ich muß noch weiter über die Sache nachdenken. Sie ist mir umso ernster, als mit dem Wegfall meines Gesetzes V nicht nur die Grundlagen meiner Arithmetik, sondern die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken scheint. Und doch, sollte ich denken, muß es möglich sein, solche Bedingungen für die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit aufzustellen, daß das Wesentliche meiner Beweise erhalten bleibt. Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch erscheint. (BwRussell, 22. VI. 1902).

Danach wurde aber dieser Bedeutungsnachweis nicht mehr erwähnt. Es wäre aber angebracht, das Problem doch zu untersuchen, um die Anwendbarkeit und die Grenzen solcher Beweise einmal festzustellen.

3.4 Es wurde schon in 2.42 darauf hingewiesen, daß bei einem gegebenen System von Namen, die alle (im Sinne Freges) bedeutungsvoll sind, Erweiterungen des Systems vorgenommen werden können und zwar so, daß alle Namen des erweiterten Systems bedeutungsvoll bleiben; daß aber solchen Erweiterungen enge Grenzen gezogen sind. Diese Grenzen sollen nun z. T. aufgezeigt werden.

3.41 Vorausgesetzt sei ein System von Namen, die alle in Bezug auf einen Bereich von bestimmten Gegenstandsnamen bzw. von Namen von bestimmten Gegenständen bedeutungsvoll sind; geht es darum, dieses System zu erweitern, dann ergibt sich die Frage, wie man diese Aufgabe so handhaben kann, daß das erweiterte System auch (im Sinne Freges) bedeutungsvoll bleibt. Im einfachen Falle, wie schon erklärt, kann das

System dadurch um einen Gegenstandsnamen erweitert werden, daß man sämtlichen einfachen Namen von Funktionen erster Stufe zusammen mit jenen Namen einen Wert beilegt; es kann um einen Namen einer Funktion erster Stufe dadurch erweitert werden, daß man der Zusammensetzung dieses Namens mit jedem bedeutungsvollen Eigennamen eine Bedeutung beilegt, die (wie die Werte im vorigen Falle) aus dem Bereich der Urgegenstände kommt. Solche Fälle - und alle im folgenden zu besprechenden - sind von den Definitionen (im Frege'schen Sinne) zu unterscheiden, weil es sich darum handelt, einem unbekannten Zeichen die Bedeutung eines dort schon bekannten Ausdruckes zu geben, wohingegen es sich hier darum handelt, den Zusammensetzungen eines Zeichens mit allen Kontexten, in denen es vorkommen darf, eine Bedeutung zu verleihen. Nun kann man in einem solchen Falle, statt Ausdrücken rein willkürliche Bedeutungen beizulegen, die Festsetzungen so treffen, daß dem Zeichen, dem man eine Bedeutung geben will, die Bedeutung eines Ausdruckes aus dem bestehenden System zukommt; solche Festsetzungen sind wohl möglich, aber nicht ohne Gefahr. Wenn man so die Bedeutung eines Ausdruckes aus dem System heranzieht, um das System zu erweitern, muß eigentlich jedesmal der Nachweis erbracht werden, daß dasjenige Zeichen, das so seine Bedeutung zu diesem Zwecke zur Verfügung gestellt hat, durch die Erweiterung des Systems seine Bedeutung nicht ändert, da die Tatsache, daß die Zeichen des Systems durch solche Erweiterungen bedeutungsvoll bleiben, keineswegs heißt, daß sie dieselbe Bedeutung immer behalten. Ferner muß beachtet werden: wenn der Kontext, dem zusammen mit dem neuen Zeichen eine Bedeutung gegeben wird, aus seiner ureigenen Bedeutungsfestsetzung irgendwelche besonderen Eigenschaften hat, so muß der Ausdruck, dessen Bedeutung herangezogen wird, diese Eigenschaften auch aufweisen - konkretes Beispiel: erklärt man ein Zeichen zusammen mit dem Identitätszeichen, so muß der Ausdruck, den man dazu heranzieht, die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Symmetrie besitzen. Die Dringlichkeit dieser Hinweise wird erklärlich, wenn man sich erinnert, daß die Erweiterung eines Systems auf unbegrenzt viele Gegenstände nur in folgender Weise möglich ist: man muß dabei - da unbegrenzt viele individuelle Festsetzungen nicht möglich sind - einen Funktionsnamen einführen, dessen Werte die neuen Gegenstände sein sollen, und jeder einfachen Funktion erster Stufe für diese Gegenstände (bzw. jedem einfachen Namen einer Funktion erster Stufe zusammen mit Namen dieser Gegenstände) Werte zuordnen, was nur so erfolgen kann, daß man Bedeutungen von Ausdrücken aus dem bestehenden System heranzieht. Gerade bei einem solchen Falle aber, und darauf

zielen wir hier ab, kommt zu der schon erwähnten noch eine neue Gefahr: kein Zeichenkomplex, der mittels einer solchen allgemeinen Bedeutungs-festsetzung die Bedeutung einer anderen Zeichenverbindung bekommen soll, darf in dem Ausdruck selber vorkommen, dessen Bedeutung er erhalten soll, noch darf die Bedeutung dessen auf ihn zurückzuführen sein. Es ist erstaunlich, wie leicht man sich bei derartigen Fällen täuschen kann, obwohl man sich sonst widersprechende oder leere Bedeutungs-festsetzungen nie einfallen lassen würde. Vielleicht kann das folgende Beispiel diesen Tatbestand verdeutlichen.

3.42 Es ist schon behauptet worden, die logischen Gesetze gälten für alle Gegenstände. Bei einer strengen logischen Kunstsprache beruht diese Geltung auf der Möglichkeit der Erweiterung des Systems über die ursprünglich angenommenen Bereiche der logischen Gegenstände hinaus. Wie problematisch eine solche Erweiterung in anderen Fällen sein dürfte, in Bezug auf den Makrobereich der empirischen Gegenstände (d.h. sinnlich wahrnehmbare, ohne Kontinuumsproblematik der Raum-Zeit-Ortung) ist sie weithin unproblematisch. Zu diesem Bereich gehören alle sichtbaren, von Menschenhand geschaffenen Gegenstände, insbesondere alle Vorkommnisse von graphischen Zeichen. Die logischen Gesetze gelten also für alle Zeichen. Dies ist selbstverständlich und gar nicht problematisch. Natürlich müssen dann solche Zeichen Namen im System haben. Nehme man aber ein logisches System mit dieser Geltung und versuche es auf semantische Prädikate zu erweitern! Man will die Bedeutungs-festsetzung für ein solches Prädikat so aufstellen, daß es für beliebige Zeichen gelten oder nicht gelten soll, je nachdem, was seine Bedeutung ist. Das Prädikat ist bedeutungsvoll, wenn die Festsetzungen hinreichen, für jedes Argument einen Wert zu erteilen. Nun aber gehört jedes Prädikat vom Moment seines Auftauchens an - ganz abgesehen davon, ob die Bedeutungs-festsetzungen ihr Ziel erreichen oder nicht - zum Bereich der Zeichen; also muß die Bedeutungs-festsetzung den Fall berücksichtigen, wo als Argument eine Zeichenverbindung genommen wird, von der gerade das Prädikat selber ein Teil ist. Dies ist von vorneherein weiter nicht schlimm: die Bedeutung eines solchen Argumentzeichens wird durch die Festsetzungen nur weiter auf die Bedeutung des in diesem Zeichen vorkommenden Argumentzeichens zurückgeführt. Ist es aber möglich, in dem System - und ohne besondere Vorkehrungen wird es immer möglich sein - als Argument eine Zeichenverbindung zu nehmen, die aus dem Namen dieses Arguments zusammen mit dem Prädikat sel-

ber besteht und berücksichtigen die Bedeutungsfestsetzungen diesen besonderen Fall nicht, dann erreichen sie ihr Ziel nicht, und das Prädikat ist nicht bedeutungsvoll. Denn sie würden die Bedeutung eines solchen Ausdruckes auf die eigene Bedeutung zurückführen. Angesichts der mannigfachen Variationen, die sich durch die verschiedenen semantischen Prädikate bieten, ist es verwunderlich, daß die meiste Aufmerksamkeit nur einem davon geschenkt wird, und dies, weil man unter der irrigen Voraussetzung, ein solcher Ausdruck sei bedeutungsvoll, aus den Bedeutungsfestsetzungen des betreffenden Prädikates (und etlichem anderen) einen Widerspruch abzuleiten scheint. So leicht würde man aber nicht annehmen, daß folgender Ausdruck eine Bedeutung hat:

Die Bedeutung des in diesem Rechteck vorkommenden Ausdrucks.

Die Bedeutungslosigkeit eines Satzes wie "Dieser Satz ist wahr" leuchtet auch eher ein, da sein Wahrheitswert genausowenig festzustellen wäre, wie der davon, daß die Klasse sich selbst angehörender Klassen sich selbst angehöre. Aber alle solchen Fälle sind Beispiele von fehlerhaften Bedeutungsfestsetzungen, die sonst sehr leicht zu vermeiden sind. Semantische Prädikate nie für Ausdrücke zu erklären, in denen sie selber vorkommen, ist eine besonders strenge, aber bestimmt erfolgreiche Methode. Sie ist aber kaum die einzige.

3.43 Ähnlich, aber nicht ganz so einfach ist die Lage bei Freges Festsetzung über seine Wertverlaufsbezeichnung. Von vorneherein ist gegen die Festsetzung (s. S. 54) nichts einzuwenden. Beide Ausdrücke, die verwendet werden, sind gleich symmetrisch, transitiv und reflexiv. Es kann zunächst nicht der Fall sein, daß die Bedeutung des bedeutungsverleihenden Ausdruckes sich durch diese Festsetzung ändern kann; er ist nämlich ein Allgemeinheitsausdruck, so daß, wenn er falsch wäre, er nicht wahr gemacht werden könnte; ist er aber wahr, dann wird eine Identität festgestellt, welche ebenfalls keine Änderung mit sich bringt. Da nun seine Wertverlaufsbezeichnung der Name einer Funktion zweiter Stufe ist, muß Frege von ihr beweisen:

Allgemein daraus, daß der Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, daß der durch seine Einsetzung in die Argumentstellen unserer Funktion zweiter Stufe entstehende Eigennamen eine Bedeutung habe.
(GGS I, s. 46).

Zu diesem Zweck will er nachweisen, daß die Wertverlaufsnamen für alle einfachen Namen von Funktionen erklärt sind. Dies ist auch zunächst dadurch erleichtert, daß alle seine einfachen Namen von Funktionen erster Stufe auf die Identität zurückgeführt werden können, so daß er seiner Erklärung darüber Rechenschaft geben muß:

Weniger einfach ist die Sache bei " $\epsilon\varphi(\epsilon)$ "; denn wir führen damit nicht bloß einen neuen Funktionsnamen, sondern zugleich zu jedem Namen einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente einen neuen Eigennamen (Wertverlaufsnamen) ein, und zwar nicht nur zu den schon bekannten, sondern im voraus zu allen, die etwa eingeführt werden mögen. Der Untersuchung, ob ein Wertverlaufsnamen etwas bedeute, brauchen wir nur solche zu unterwerfen, welche aus bedeutungsvollen Namen von Funktionen erster Stufe mit einem Argumente gebildet sind. Wir wollen dies kurz rechte Wertverlaufsnamen nennen... Setzen wir den Wertverlaufsnamen " $\epsilon\phi(\epsilon)$ " für " $\mathfrak{F}$ " in " $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ " ein, so ist also die Frage, ob " $\mathfrak{F}=\epsilon\phi(\epsilon)$ " ein bedeutungsvoller Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argumente sei, und dazu ist wieder zu fragen, ob alle Eigennamen etwas bedeuten, die hieraus dadurch hervorgehen, daß wir in die Argumentstellen entweder einen Namen eines Wahrheitswertes oder einen rechten Wertverlaufsnamen setzen. Durch unsere Festsetzung, daß " $\epsilon\phi(\epsilon) = \epsilon\psi(\epsilon)$ " immer gleichbedeutend sein soll mit " $\neg\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ ", daß " $\epsilon(-\epsilon)$ " das Wahre und " $\epsilon(\epsilon = \neg\alpha = \alpha)$ " das Falsche bedeuten solle, ist in jedem Falle einem Eigennamen von der Form " $\mathfrak{f} = \Delta$ " eine Bedeutung gesichert, wenn " $\mathfrak{f}$ " und " Δ " rechte Wertverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerten sind...

Die rechten Wertverlaufsnamen dürfen also in unseren Kreis von bedeutungsvollen Namen aufgenommen werden. Damit ist aber dasselbe für unseren Funktionsnamen " $\epsilon\varphi(\epsilon)$ " entschieden, da nun allgemein daraus, daß ein Name einer Funktion erster Stufe etwas bedeute, folgt, daß der durch dessen Einsetzung in " $\epsilon\varphi(\epsilon)$ " entstehende Eigenname etwas bedeute.
(GGS I, s. 50).

Nun hat er dabei nicht alles bewiesen, was behauptet wird. Er hat nämlich bewiesen, daß, wenn der Name einer Funktion erster Stufe bedeutungsvoll ist, dann der Name ihres Wertverlaufes zusammen mit jedem einfachen Namen einer Funktion erster Stufe einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet. Zu seiner Behauptung, daß der Funktionsname " $\epsilon\varphi(\epsilon)$ " bedeutungsvoll ist, gehört aber der Beweis, daß jeder Wertverlaufsnamen, der zusammen mit jedem einfachen Namen einer Funktion erster Stufe einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, wiederum zusammen mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Funktion erster Stufe einen bedeu-

tungsvollen Gegenstandsnamen bildet. Er dürfte es für selbstverständlich gehalten haben; es ist aber falsch. Es ist nämlich folgendes der Fall: man könnte rein willkürlich ein Zeichen einer Funktion erster Stufe aufstellen und mit ihm den ersten Teil des Beweises liefern, weil auch dann, wenn er nicht bedeutungsvoll wäre, würde noch aus der Annahme, daß er bedeutungsvoll wäre folgen, daß der entsprechende Wertverlaufsname zusammen mit den einfachen Funktionsnamen bedeutungsvolle Eigennamen bilden würde. Aber gerade deswegen, weil er nicht bedeutungsvoll wäre, würde man den zweiten Teil des Beweises nicht durchführen können; nachdem man einmal die Annahme macht, der Name sei bedeutungsvoll, muß diese Annahme konsequent durchgehalten werden, d. h. es müßte nun im zweiten Beweisteil auch bewiesen werden, daß aus der Tatsache, daß sein Wertverlaufsname zusammen mit dem einfachen Funktionsnamen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, folgt, daß dieser Name selber mit seinem eigenen Wertverlaufsnamen einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, was nicht der Fall ist. Nun kann dieser hypothetische Fall nicht vorkommen, weil man nicht willkürlich ein Zeichen heranbringen kann. Aber etwas ähnliches passiert trotzdem: vorerst besteht der Gegenstandsbereich des Systems in den Wahrheitswerten; für alle bedeutungsvollen Namen von Funktionen erster Stufe kann in diesem System bewiesen werden, daß durch die Festsetzung ihre Wertverlaufsnamen (als Ganzes genommen) bedeutungsvolle Eigennamen sind. Dadurch aber entstehen neue bedeutungsvolle Namen von Funktionen erster Stufe; ihre Wertverlaufsnamen werden auch bedeutungsvoll sein. Wie weit man dies auch fortsetzt, man erhält aus allen solchen Funktionsnamen bedeutungsvolle Wertverlaufsnamen (als Ganzes wiederum). Man kann darüber hinaus auch neue bedeutungsvolle Namen von Funktionen erster Stufe dadurch erzeugen, daß man die so erhaltenen Wertverlaufsnamen als aus Teilen bestehend betrachtet, insofern, als man Namen von Gegenständen, die Teile von jenen Wertverlaufsnamen sind, in Argumentstellen umwandelt. Diese Funktionen sind deshalb bedeutungsvoll, weil in der endlosen Fortsetzung des ersten Einsetzungsvorganges der Wertverlaufserzeugung sämtliche Namen schon erzeugt wurden, die die Wertnamen der neuen Funktionen für die verschiedensten Argumente darstellen. Aus den in dieser Weise erhaltenen Funktionen können nun auch bedeutungsvolle Wertverlaufsnamen gebildet werden. In dieser Weise erhält man eine beträchtliche Menge bedeutungsvoller Wertverlaufsnamen, aber man hat noch nicht alle mit Hilfe des Wertverlaufszeichens syntaktisch rechtmäßig gebildeten Funktions- und Wertverlaufsnamen erschöpft: es bleiben immer noch die im-

prädikativen Begriffsnamen, die dadurch gebildet werden, daß man Funktionszeichen innerhalb von Wertverlaufsnamen quantifiziert. Auch die Wertverläufe dieser Funktionen bleiben noch aus. Diese Funktionsnamen unterscheiden sich von den vorhergehenden dadurch, daß in den früheren Fällen die Funktionsnamen immer bedeutungsvoll waren, so daß jeder Eigenname, der für die einfachen Funktionsnamen erklärt worden wäre, auch für sie erklärt worden wäre, wohingegen diese letzteren Namen erst insgesamt als bedeutungsvoll erwiesen werden können, wenn das Wertverlaufszeichen selber als bedeutungsvoller Name einer Funktion zweiter Stufe nachgewiesen worden ist. Da kommt nun die Analogie zum obigen Willkürfall: Man kann mit diesen Namen von Funktionen erster Stufe unter der Annahme, daß sie bedeutungsvoll sind, den ersten Teil des Beweises durchführen. Macht man jedoch diese Annahme, dann muß sie konsequent durchgeführt werden: das heißt im zweiten Beweisteil muß auch nachgewiesen werden, daß derartige Prädikate zusammen mit den eigenen Wertverlaufsnamen (wie auch mit allen Wertverlaufsnamen, von denen ihre eigenen Wertverlaufsnamen ein Teil sind, da die Annahme in diesen Fällen weiter gemacht wird), bedeutungsvolle Gegenstandsnamen bilden. Zu diesem Beweis darf man weder voraussetzen, daß das Wertverlaufszeichen selber bedeutungsvoll ist, noch daß derjenige Eigenname, der aus der Einsetzung des Namens des Wertverlaufes einer solchen Funktion an die Argumentstellen der Funktion selber hervorgeht, bedeutungsvoll ist; da gerade diese beiden zu beweisen sind, käme sonst ein solcher Schritt petitio principii gleich. Damit kann dieser Beweis nicht so geführt werden, wie er oben für den allgemeinen Fall bewiesen wurde, daß imprädikative Funktionsbildungen bedeutungsvoll sind: da wurde vorausgesetzt, daß alle Namen von Funktionen zweiter Stufe, die quantifiziert wurden (in dem ein quantifiziertes Funktionszeichen, ein deutscher Buchstabe vorkommt) bedeutungsvoll sind. Man müßte beweisen, daß aus den Bedeutungsfestsetzungen der einzelnen Teilzeichen eines solchen Ausdruckes allgemein folgt, daß der Ausdruck selber eine Bedeutung hat. Das Gegenteil ist aber beweisbar: Es gibt Ausdrücke, für die das nicht der Fall ist. Es wird darauf verzichtet, dies vorzuführen, da es schon hiermit festgestellt worden ist, daß die Bedeutungsfestsetzungen für ein Wertverlaufs- oder Klassenzeichen erst dann hinreichen, diesem Zeichen eine Bedeutung zu geben, wenn aus ihnen die Bedeutung von solchen Zusammensetzungen eindeutig folgt, welche etwa besagen würde, die Klasse der sich selbst angehörenden Klassen gehört sich selbst an, oder dergleichen. Das ist für die Anwendung solcher Bedeu-

tungsbeweise äußerst wichtig; man kann durch diesen Beweis wohl die Grundlage seines Systems sichern; die Grenzen der Durchführbarkeit des Beweises zeigen die Grenzen einer vertretbaren Logik auf. Hätte Frege diesen Beweis richtig durchgeführt, wäre er nicht in Schwierigkeiten gekommen.

3.44 Einen Maßstab aufgestellt zu haben, um die Grenzen der Logik zu ermitteln, ist nicht dasselbe, wie diese Grenzen selber zu ermitteln. In der Tat, dieser Maßstab zeigt fast mehr Probleme auf als vorher da waren; er löst wenige davon. Man kann mit ihm feststellen, ob beliebig aufgestellte Bedeutungskriterien - etwa für Wertverlaufsbezeichnungen im Frege'schen System - ihr Ziel erreichen, aber man kann nicht mit ihm die Frage beantworten, ob es überhaupt möglich ist, solche Festsetzungen zu finden. Dies letzte ist eine sehr wichtige Frage. Wenn dies nicht möglich ist, d.h., wenn man die semantischen Festsetzungen nicht so aufstellen kann, daß die Grenzen der semantischen Rechtmäßigkeit (Ausdrücke, die bedeutungsvoll sind) mit denen der syntaktischen Rechtmäßigkeit übereinstimmen, dann muß man die Bestimmungen der syntaktischen Rechtmäßigkeit einengen - man muß die Bildungsregeln ändern. Solche Änderungen aber machen das System bei zunehmender Kompliziertheit immer schwieriger zu handhaben. Gegebenenfalls also würde die Annäherung der Grenzen der Logik durch zunehmende Undurchsichtigkeit gekennzeichnet. Nun ist das Problem von den Grenzen der Logik die Frage des Aufbaues der Arithmetik in der Logik. Die Anforderungen, die dafür an die Logik gestellt werden, sind erheblich. Es ist z.B. schon gezeigt, daß das engere System Freges zwar bedeutungsvoll ist, aber nicht ausreicht zum Aufbau der Arithmetik wegen seines Mangels an logischen Gegenständen. Man könnte dieses System wohl bedeutungsvoll auf unbegrenzt viele logische Gegenstände erweitern, wenn man nur imprädikative Funktionsbildung ausschließt, in dem Quantifikation innerhalb Wertverlaufsbezeichnungen stattfindet, was ein nicht zu kompliziertes System gibt. Es kann aber gezeigt werden, daß dieses System genauso wenig ausreicht, um die Aufgabe zu erfüllen. Man muß die Eigenschaften von Funktionen mindestens zum Teil auf ihre Wertverläufe übertragen (sonst haben diese kaum Eigenschaften) und dazu sind solche Funktionsbildungen nötig, die gerade ausgeschlossen sind. Eine Zuflucht in die Mehrstufigkeit - die aus vielen Gründen nicht wünschenswert ist - bleibt gesperrt, weil ohne Ausschluß von imprädikativen Begriffsbildungen kein Bedeutungsbeweis über die Stufe drei durchgeführt werden

kann (was leider hier nicht bewiesen werden kann), während streng prädikative Systeme nie ans Ziel kommen würden. (Natürlich würden Reduzibilitätsannahmen nie Freges strenge Anforderungen, vor allem nicht die eines Bedeutungsbeweises, erfüllen.) Wer glaubt, diese Problematik käme in einer Klassenlogik (also mit Klassenzugehörigkeit als einziger Funktion im Fregeschen Sinne) so nicht vor, irrt sich sehr: versucht man einen Bedeutungsbeweis für ein solches System zu führen, was leider hier nicht vorgeführt werden kann, kommt man auf dasselbe Problem: Bedeutungsfestsetzungen zu treffen, so daß semantische und syntaktische Rechtmäßigkeit übereinstimmen, scheint kaum möglich zu sein, während Bildungsregeln, die dieses erreichen, mit zunehmender Leistungsfähigkeit dieses Systems äußerst kompliziert werden. (Übrigens taucht diese Problematik in Bezug auf Freges System in wenig veränderter Form in solchen Systemen wieder auf, was klar ist, wenn man überlegt, daß ein dem Komprehensionsaxiom entsprechendes Gesetz in seinem System ableitbar ist.) Nun muß darauf hingewiesen werden, daß die ganze Problematik einer Spaltung zwischen syntaktischer und semantischer Rechtmäßigkeit ein Vermächtnis von Freges Funktionsbegriff ist; dem syntaktischen Begriff des Namens einer Funktion erster Stufe (sonst Formel mit einer freien Variablen) verdankt die moderne Logik viel von ihrer Leistungsfähigkeit, er bildet die Grundlage der lingua characteristica, die ganz bestimmte Anforderungen an die Zusammensetzung von Namen und die Erzeugung von neuen Namen aus gegebenen durch Zusammensetzung stellt; die Eleganz, die er mit sich bringt, ist aber wertlos, wenn die semantischen Anforderungen an solche Namen nicht erfüllt werden können. Die Problematik um die Grenzen der Logik ist eine Problematik des Fregeschen Funktionsbegriffes. Deswegen darf die Hoffnung ausgesprochen werden, daß diese Arbeit als Beitrag zur Erläuterung jener Problematik angesehen werden kann. Es wurden folgende Resultate erzielt:

- 1) Der Funktionsbegriff Gottlob Freges wurde dargestellt und in allen Einzelheiten so erläutert, daß eine sinnvolle Diskussion über diesen Begriff wohl möglich ist; d. h. er kann als Grundlage weiterer wissenschaftlicher Untersuchungen dienen.
- 2) Die Erläuterung dieses Begriffes innerhalb Freges eigener Philosophie der Logik, mit seinen eigenen logischen Methoden und nach seinen logischen Prinzipien dürfte diese Philosophie, diese Methoden und Prinzipien auch hinreichend aufgeklärt und von ande-

ren Ansichten abgegrenzt haben. Damit können sie in die wissenschaftliche Diskussion einbezogen werden.

3) Freges Anforderung des Beweises, daß jeder rechtmäßig gebildete Ausdruck eines Systems eine Bedeutung habe, wurde dadurch gerechtfertigt, daß die Möglichkeit wie auch die Nützlichkeit solcher Beweise aufgezeigt worden sind. Diese Anforderung ist dadurch insoweit rehabilitiert, daß sie wieder zur Geltung in der Wissenschaft kommt.

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Frege steht noch aus und ist noch nicht durch die Zeit überholt worden. Diese Auseinandersetzung zu fördern ist derjenige Frege schuldig, der seine Leistungen kennt und seine Ergebnisse benutzt. Wenn diese Arbeit einen Einblick in die Tiefe und Strenge der Logik von Frege vermittelt hat - und dies war ständig ein Nebenziel in allen Teilen der Arbeit - dann hoffe ich hiermit einen Teil meiner Schuld abgetragen zu haben.

Anmerkungen

- 1) Ein paar biographische Hinweise dürften angebracht sein. Zuerst der Lebenslauf aus seiner Habilitationsschrift:

ICH, Friedrich Ludwig Gottlob FREGE, wurde am 8ten November 1848 zu Wismar geboren. Mein Vater, Alexander, welcher dort Vorsteher einer höheren Töchterschule war, wurde mir im Jahre 1866 durch den Tod entrissen. Meine Mutter Augusta, geborene Bialloblotzki, ist noch am Leben. Ich wurde im Lutherischen Glauben erzogen. Nachdem ich 15 Jahre das Gymnasium meiner Vaterstadt besucht hatte, ward ich um Ostern 1869 mit dem Zeugnisse der Reife entlassen und lag zwei Jahre in Jena, dann fünf Semester in Göttingen, mathematischen, physikalischen, chemischen und philosophischen Studien ab. In Göttingen erwarb ich den Doktorgrad.

Er wurde im Jahre 1879 außerordentlicher Professor der Mathematik in Jena. Dies blieb er bis er im Jahre 1917 in den Ruhestand trat. Er starb am 26ten Juli 1925.

- 2) Hiermit korrigierte Frege eine frühere Meinung aus seinen ersten Werken, wonach der Gegenstand der Logik das richtige Denken (BrLBs, s. 5) bzw. Gesetze des Denkens sind. (Bs, § 13).
- 3) Es leuchtet wahrscheinlich ein, daß Frege die Aufstellung von Theoremen über die Beweisbarkeit von Gesetzen prinzipiell nicht als Ersatz für deren Beweise ansehen würde.
- 4) Dies in UGG2 III, wo die grundsätzliche Unterscheidung zwischen logischen und deskriptiven Zeichen zu dem Zweck vorgeschlagen wurde, Beweise zu ermöglichen, die darauf beruhen, daß logische Zeichen in einer Folgerung wesentlich vorkommen, deskriptiv aber nicht. Es ging nämlich darum, die Unabhängigkeit (nicht logischer Sätze) voneinander zu beweisen. Frege stellt darin das Problem so auf: Der Satz A ist unabhängig von den Sätzen B, C, D, wenn A nicht zu der Folgerungsmenge von B, C, D gehört.

Nur wenn sich irgendwelche deskriptiven Zeichen auffinden lassen, deren Einsetzung in die Sätze A, B, C, D anstelle von deskriptiven Zeichen derselben syntaktischen Kategorie es bewirkt, daß die so aus B, C, D gewonnenen Sätze weiterhin wahre Propositionen ausdrücken, während der aus A erhaltene Satz eine falsche Proposition ausdrückt, dann ist A von B, C, D unabhängig.

- 5) Es dürfte aufgefallen sein, daß Frege zu der Zeit (BrLBs stammt wahrscheinlich aus dem Jahre 1881) die vollständige Zurückführung der Arithmetik auf die Logik noch nicht ganz bewerkstelligt hat. Es ist auch auffallend, daß er in dieser frühen Periode noch nicht klar zwischen Zeichen und Bezeichnetem unterschied.
- 6) Übrigens hielt Frege die Peanosche Schrift eher für eine lingua characteristica und weniger für ein calculus ratiocinator, weil nicht genug Wert auf das Schließen gelegt wurde. (BsPeano, s. 370, 371).
- 7) Es fiel in dieser Auseinandersetzung mit Husserl ein Satz, der Freges Strenge von einer anderen Seite beleuchtet:

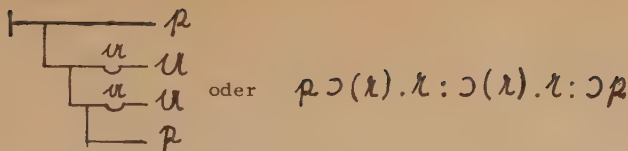
Ich finde aber, daß eine Frage, für deren Beantwortung es kein objektives Kriterium gibt, überhaupt in der Wissenschaft keine Stelle hat. (BwHusserl, 1. XI. 1906).

- 8) Es geht übrigens aus dem Zitat hervor, daß Frege die Verwendung von definierten Zeichen in den Ursätzen strikt abgelehnt hat, weil der Übergang von einem Satz und einer Definition zu einem anderen Satz eine Ableitung ist und deshalb die Aufstellung der Axiome nicht vorausgehen darf. Er hätte aus diesem Grund allein die Zurückführung der Negation auf die Unverträglichkeit verworfen. Er hätte aus einem anderen Grund dieses Vorgehen sogar mit Entschiedenheit verworfen: Definitionen müssen prinzipiell entbehrlich sein und das sind sie gar nicht mit Notwendigkeit, wenn die Schlußregeln sich auf definierte Zeichen beziehen. Der Nachweis muß nämlich erst erbracht werden, daß es überhaupt möglich ist, Schlußregeln für eine Aussagenlogik aufzustellen, deren Axiome nur mittels des Schefferschen Strichs ausgedrückt werden. Aber auch dann, wenn dies möglich wäre, hätte Frege Bedenken gehabt, weil die Axiome dadurch zu kompliziert werden, wie er gegen ein ähnliches Vorhaben von Seiten Russells einwendete:

Ihre Definition " $\sim p, =: p \supset (x)x$ " hat mich interessiert. In meinen Zeichen sähe sie so aus:

$$\Vdash (\neg p) = \frac{\frac{\neg}{\neg} \quad \neg}{\neg} \quad \frac{\neg}{p}$$

Dadurch wird ein Urzeichen erspart; man wird aber wohl einige neue Urgesetze brauchen, z. B.



Es ist eigentlich für ein Urgesetz zu verwickelt und ich weiß nicht, ob es sich auf Einfacheres zurückführen läßt. (BwRussell, 13. XI. 1904).

- 9) Die Spitze gegen Boole ist gewollt - Frege wettete gegen die Verwendung eines Urzeichens für das ausschließende "oder". Seine Begründung stellt eine vortreffliche Anwendung seines Prinzips der Einfachheit dar:

Ob das nicht auszuschließende "oder" ein eigenes Zeichen einzuführen ist, ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit. Nun liegt in dem ausschließenden "A oder B" zweierlei:

1. daß eines von beiden stattfindet,
2. sie nicht beide stattfinden.

Da dies nicht immer verbunden vorkommt, da vielmehr nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeit die Verbindung seltener ist als jedes für sich, so ist es zweckmäßiger, für die häufiger einzeln vorkommenden Fälle eigene Zeichen zu haben als für die seltenere Verbindung. (BIFBs, s. 4).

Nun kommt aber das ausschließende "A oder B" vielleicht nicht einmal vor, während das nicht ausschließende zehnmal gebraucht wird. Auch in der Chemie wird es jeder angemessener achten, die Elemente Wasserstoff und Sauerstoff je durch einen Buchstaben, H und O darzustellen und aus ihnen OH zu bilden, als die Hydroxylgruppe OH durch einen einzigen Buchstaben, dagegen Wasserstoff durch eine Zeichenverbindung als deoxydiertes Hydroxyl zu bezeichnen. (BrBBs, s. 33).

- 10) Freges Auffassung des Verhältnisses zwischen Implikation und Folgerung (materieller und formaler Implikation) bedarf vielleicht einer Erklärung. Wir führen zu diesem Zweck zwei Zitate an, einen aus der früheren Zeit (1882) als es darum ging, seine Begriffsschrift zu erklären und eines aus seinem letzten veröffentlichten Werk (1923), wo er versuchte, eine nicht-symbolische Logik zu begründen:

Ich verstehe nun unter



die Verneinung des dritten Falles. Diese Festsetzung mag zunächst gekünstelt erscheinen. Weshalb ich gerade den dritten Fall herausgreife und gerade dessen Verneinung durch ein besonderes Zeichen ausdrücke, ist zunächst nicht deut-

lich. Ein Beispiel wird jedoch sofort den Grund dafür erleuchten lassen:

$$\boxed{x^2 = 4} \quad x^2 = 4$$

verneint den Fall, daß x^2 nicht gleich 4, während doch $x + 2 = 4$ ist, so ist $x^2 = 4$. Diese Übersetzung läßt die Wichtigkeit der Beziehung erkennen, die in unseren Zeichen liegt. Ist doch das hypothetische Urteil die Form für alle ursächlichen Zusammenhänge überhaupt. Freilich ist die Widergabe durch "wenn" nicht in allen Fällen dem Sprachgebrauch angemessen, sondern nur, wenn ein unbestimmter Bestandteil wie hier x dem ganzen Allgemeinheit verleiht. Setzen wir für x 2, so würde man

$$\boxed{2^2 = 4} \quad 2^2 = 4$$

nicht passend übersetzen: "Wenn $2 + 2 = 4$ ist, so ist $2^2 = 4$ ". (ZweckBs, s. 6).

Es seien wieder "A und B" eigentlich Sätze, dann haben wir in

"nicht ((nicht A) und B)" "

den Ausdruck eines hypothetischen Gefüges, dessen Folge der Sinn (Gedankeninhalt) von "A" und dessen Bedingung der Sinn von "B" ist. Dies erfolgt aufgrund gerade getroffener Festsetzungen über hypothetisch, "Folge" und "Bedingung". Wir können dafür auch schreiben:

"Wenn B, so A".

Freilich können hier Bedenken entstehen. Man wird vielleicht finden, daß der Sprachgebrauch hierdurch nicht getroffen sei. Demgegenüber muß immer wieder betont werden, daß es der Wissenschaft erlaubt sein muß, ihren eigenen Sprachgebrauch zu haben, da sie sich der Sprache des Lebens nicht immer unterwerfen kann... Der Satz

"Wenn 2 größer als 3 ist, so ist vier eine Primzahl"

wird gewiß von vielen für unsinnig erklärt werden, und doch ist er nach meiner Festsetzung wahr, weil die Bedingung falsch ist. Falsch sein ist noch nicht unsinnig sein...

Auch in dem Satzgefüge

"Wenn ich einen Hahn habe, der heute Eier gelegt hat, wird morgen der Kölner Dom einstürzen"

ist der ausgedrückte Gedanke wahr. "Aber Bedingung und Folge haben hier ja gar keinen inneren Zusammenhang", wird vielleicht jemand sagen. Nun, ich habe keinen solchen Zusammenhang in meiner Erklärung gefordert und bitte nur das unter "Wenn B so A" zu verstehen, was ich gesagt und in der Form

"nicht ((nicht A) und B)" "

ausgedrückt habe. Freilich wird diese Auffassung eines hypothetischen Gedankengefüges zunächst befremden. Es kommt bei meiner Erklärung nicht darauf an, den Sprachgebrauch des Lebens zu treffen, der für die Zwecke der Logik meist zu verschwommen ist... Meine Aufgabe ist es, hier durch Absecheidung des Beiwerks als logischen Kern ein Gefüge von zwei Gedanken herauszuschälen, ein Gefüge, welches ich hypothetisches Gedankengefüge genannt habe. Die Einsicht in den Bau der aus zwei Gedanken gefügten Gedanken muß die Grundlage für die Betrachtung vielfältiger gefügter Gedanken bilden.

Was ich über den Ausdruck "Wenn B, so A" gesagt habe, darf nicht so verstanden werden, daß jedes Satzgefüge dieser Form ein hypothetisches Gedankengefüge ausdrücke. Wenn "A" für sich allein kein vollständiger Ausdruck eines Gedankens, also kein eigentlicher Satz ist, oder wenn "B" für sich allein kein eigentlicher Satz ist, haben wir einen anderen Fall. In dem Satzgefüge:

"Wenn jemand ein Mörder ist, so ist er ein Verbrecher"

drückt weder der Bedingungssatz, noch der Folgesatz für sich genommen einen Gedanken aus. Ob das, was in dem aus dem Zusammenhang gelösten Satze "Er ist ein Verbrecher" ohne hinzukommenden Wink ausgedrückt wird, wahr oder falsch sei, läßt sich nicht entscheiden, weil das Wort "er" kein Eigenname ist, sondern in dem aus dem Zusammenhang gelösten Satze ohne hinzukommenden Wink nichts bezeichnet. Folglich drückt unser Nachsatz keinen Gedanken aus, ist also kein eigentlicher Satz. Dasselbe gilt von unserem Bedingungssatz, denn er enthält einen Bestandteil - "jemand" - der ebenfalls nichts bezeichnet. Trotzdem kann das Satzgefüge einen Gedanken ausdrücken. Das "jemand" und das "er" weisen aufeinander hin. Dadurch und durch das "wenn -, so" werden die beiden Sätze so miteinander verbunden, daß sie zusammen einen Gedanken ausdrücken, während wir in einem hypothetischen Gedankengefüge drei Gedanken unterscheiden können, nämlich die Bedingung, die Folge und den aus beiden gefügten Gedanken. Nicht immer drückt also ein Satzgefüge einen Gedanken aus, und es ist sehr wesentlich, die beiden Fälle zu unterscheiden, die bei einem Satzgefüge von der Form

"Wenn B, so A"

vorkommen. (GedGef., s. 45-47).

- 11) Da die Stellung von eigentlichen Eigennamen in solchen Theorien etwas bestritten ist, dürfte es angebracht sein, Freges Meinung dazu zu zitieren:

Bei einem eigentlichen Eigennamen wie "Aristoteles" können freilich die Meinungen auseinander gehen. Man

könnte z. B. als solchen annehmen: Der Schüler Platons und Lehrer Alexander des Großen. Wer dies tut, wird mit dem Satze "Aristoteles war aus Stagira gebürtig" einen anderen Sinn verbinden als einer, der als Sinn dieses Namens annähme; Der aus Stagira gebürtige Lehrer Alexander des Großen. Solange nur die Bedeutung dieselbe bleibt, lassen sich diese Schwankungen des Sinnes ertragen, wiewohl auch sie in dem Lehrgebäude einer beweisenden Wissenschaft zu vermeiden sind und in einer vollkommenen Sprache nicht vorkommen dürften. (SuB, s. 27).

- 12) J. Thomas, Gedankenlose Denker; Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 15, s. 436).

Dabei ging es Thomas, ein Jenaer Kollege (Ordinarius für Mathematik) von Frege (Außerordinarius für Mathematik) nicht um die Semantik, sondern um seine eigene recht merkwürdige Auffassung der Gleichheit; er fuhr fort:

Sagt man aber, der Morgenstern ist derselbe "Stern" wie der Abendstern, so tritt ein Tertium hinzu. Der menschliche Verstand in seiner souveränen Schöpferkraft, der Natur ihre Gesetze vorschreibend, bildet einen Begriff "Stern" und richtet diesen Begriff so ein, daß der Morgenstern derselbe Stern ist, als der Abendstern. Ähnlich abstrahiert der, der zählen lernt, von der Verschiedenheit der Rechensteine, an denen er es lernt, setzt sie einander gleich. In dieser Möglichkeit der Fähigkeit des menschlichen Verstandes, von der Verschiedenheit gewisser Dinge zu abstrahieren, sie einander gleichzusetzen, glaubte ich die Fruchtbarkeit des Gleichheitszeichens zu erkennen.

Solche Ansichten waren wohl geeignet, Frege aus der Fassung zu bringen, vor allem deswegen, weil er damals schon seit Jahrzehnten auf die Inkonsequenz eben dieser Auffassung hingewiesen hatte; seine Erwiderung dazu, vermindert um eine Menge bissiger Ironie, lautet:

Nach dem, was er vorher gesagt, scheint Herr Thomae durch das Abstrahieren Identität erreichen zu wollen. Nun gut! Werden die Rechensteine dadurch identisch, so haben wir nunmehr nur noch einen Rechenstein; das Zählen kommt nicht über "eins" hinaus. Wer Dinge, die er zählen soll nicht unterscheiden kann, der kann sie auch nicht zählen. Auch wer zählen lernt, muß die Rechensteine unterscheiden, z. B. an ihrer verschiedenen Entfernung vom Tischrande. Die Rechensteine müssen verschieden sein, und diese Verschiedenheit muß auch erkannt werden. Brächte die Abstraktion alle Unterschiede zum Verschwinden, so höbe sich die Möglichkeit des Zählens auf. Andererseits, wenn das Wort "gleich" keine Identität bezeichnen soll, nun dann unterscheiden sich die gleichen Gegenstände also in einigen Eigenschaften,

in anderen stimmen sie überein. Um das zu wissen, brauchen wir nicht erst von der Verschiedenheit zu abstrahieren. Da die Gegenstände nun doch einmal verschieden sein müssen, kommt es wirklich nicht darauf an, ob sie ein bißchen mehr oder ein bißchen weniger verschieden sind, wenn sie nur überhaupt unterscheidbar sind. Sehen, leibliches wie geistiges, ist unterscheiden... Wenn mit dem Worte "gleich" nicht Identität, sondern nur eine Übereinstimmung in irgendeiner Hinsicht gemeint ist, so muß angegeben werden, oder aus dem Zusammenhang erkennbar sein, in welcher Hinsicht: gleich in der Farbe oder gleich an Duft usw. Das bloße Wort "gleich" ist nichtssagend, wenn es nicht irgendwie genauer erklärt wird. Und wenn der menschliche Verstand beliebige Gegenstände einander gleichsetzen kann, so ist mit dem Worte "gleich" erst recht nichts gesagt, und was mit dem Gleichsetzen gemeint sei, bleibt dunkel. Man bilde sich doch nicht ein, durch Abstrahieren und Gleichsetzen eine größere Übereinstimmung erreichen zu können, als in Wahrheit besteht. (AF Thomae, s. 589).

- 13) Diese Unterscheidung, bei der er freilich eine andere Bezeichnungsweise verwendete, hielt er für wesentlich in der Syntax. Die Schärfe, mit der er später gegen Thomae polemisierte, entstand zum Teil daraus, daß Thomae diese Unterscheidung nicht begriffen hat. Frege redete damals von einem Spiel (Kalkül), das aus den Gegenständen des Spiels (die Figuren) und den Spielregeln besteht, und von der Theorie des Spieles (Metatheorie); er forderte dabei die vollständige Aufzählung der Spielgegenstände und Spielregeln, wie auch die Angabe des Zwecks des Spiels. Er verlangte zugleich die Unterscheidung zwischen Zeichen und Figur. Es ist zu bemerken, daß seine Unterscheidung zwischen Metatheorie und Kalkül keine Sprachunterscheidung im modernen Sinne war; vielmehr sah er diese Sprachunterscheidung innerhalb des Kalküls: Die Regeln gehören mit zum Kalkül, obwohl sie auf einer verschiedenen Sprachstufe sind.

In seinen veröffentlichten Werken erreichte Frege nie eine systematische Unterscheidung zwischen Sprache und Metasprache, obwohl er sehr nah daran kam - nicht nur mit seiner strengen Unterscheidung zwischen Zeichen und Bezeichnetem, sondern eher mit seiner Unterscheidung zwischen Begriffsschrift und Darlegung der Begriffsschrift oder mit seiner Anforderung eines Folgerungskalküls in UGG2 III, der natürlich nur metasprachlich zu erfüllen wäre. In einer unveröffentlichten Schrift allerdings hat er die Sprachunterscheidung aus systematischen Überlegungen und in aller Strenge wohl gemacht: in

einer kleinen Schrift, die in aller Wahrscheinlichkeit aus der Zeit um 1920 stammt, stieß er auf Schwierigkeit bei der Erörterung der logischen Allgemeinheit, die für Frege Eigenschaft eines Gedankens ist:

Wenn ein Gedanke nicht sinnlich wahrnehmbar ist, wird nicht zu erwarten sein, daß seine Allgemeinheit es sei. Ich bin nicht in der Lage, einen Gedanken vorweisen zu können, wie ein Mineraloge ein Mineral zeigt, auf dessen eigentümlichen Glanz er dabei aufmerksam macht. Durch eine Definition die Allgemeinheit zu bestimmen, dürfte unmöglich sein.

Die Sprache mag einen Ausweg zu eröffnen scheinen; denn einerseits sind ihre Sätze sinnlich wahrnehmbar, und andererseits drücken sie Gedanken aus. Als Mittel des Gedankenaustausches muß sich die Sprache dem Gedanklichen anähneln. So können wir hoffen, sie als Brücke vom Sinnlichen zum Unsinnlichen gebrauchen zu können. Nachdem wir uns über das Sprachliche verständigt haben, mag es uns leichter werden, das gegenseitige Verstehen auf das Gedankliche auszuweiten, das in der Sprache sich abbildet. (FragAll, s. 2).

Bei der Entwicklung dieses Vorhabens kommt er auf das folgende:

Ein Satz, den ein Schriftsteller hinschreibt, ist zunächst eine Anweisung zur Bildung eines gesprochenen Satzes in einer Sprache, der Lautfolgen als Zeichen zum Ausdruck eines Sinnes dienen. So entsteht zunächst nur ein mittelbarer Zusammenhang zwischen geschriebenen Zeichen und einem ausgedrückten Sinne. Nachdem aber dieser Zusammenhang einmal hergestellt ist, kann man den geschriebenen oder gedruckten Satz auch unmittelbar als Ausdruck eines Gedankens, also als einen Satz im eigentlichen Sinne des Wortes, ansehen. So erhält man eine auf den Gesichtssinn angewiesene Sprache, die im Notfall auch ein Tauber lernen kann. In diese können einzelne Buchstaben als unbestimmt andeutende Satzteile aufgenommen werden. Die soeben dargelegte Sprache, die ich Hilfssprache nennen will, soll uns als Brücke vom Sinnlichen zum Unsinnlichen dienen. Sie enthält zwei verschiedene Bestandteile: die Wortbilder und die einzelnen Buchstaben. Jene entsprechen Wörtern der Lautsprache, diese sollen unbestimmt andeuten. Von dieser Hilfssprache ist die Sprache zu unterscheiden, in der sich mein Gedankengang vollzieht. Diese ist das übliche geschriebene oder gedruckte Deutsch, meine Darlegungssprache. Die Sätze der Hilfssprache dagegen sind Gegenstände, von denen in meiner Darlegungssprache die Rede sein soll. Deshalb muß ich sie in meiner Darlegungssprache bezeichnen können, ebenso wie in einer astronomischen Abhandlung die Planeten durch ihre Eigennamen "Venus", "Mars" bezeichnet werden. Als solche Eigennamen der Sätze der Hilfssprache benutze ich diese selbst, jedoch in Anführungszeichen eingeschlossen. (FragAll, s. 3, 4).

Die Auseinandersetzung hierüber befindet sich in GGs II, § 86-137, AF Thomae, und NTfAN.

- 14) Falls man einwenden wollte, die sogenannte mehrwertige Logik stelle gerade solche genauen Gesetze für unscharf begrenzte Begriffe aus, wie Frege sie hier für unmöglich hält, so muß erwidert werden, daß er diesen Einwand sicherlich verworfen hätte. Erstens, was allgemein bekannt ist, beruht gerade die Gültigkeit der Gesetze eines solchen Systems auch darauf, daß die Begriffe weiterhin scharf begrenzt sind, diesmal nur in Bezug auf mehrere Werte. Zweitens kam für Frege nur das Wahre und das Falsche für die formale Logik in Frage: er hielt die Modalwerte wie auch alle Gewißheitswerte (mithin auch die der Bestätigungswahrscheinlichkeit) für Werte des Fürwahrhaltens, bzw. Erkennens und deshalb nicht primär logisch. Er hätte solche Systeme - als Anwendung der Logik, wenn z. T. auf die Logik selber - zur Methodologie gerechnet. Daß Frege die sogenannte "intuitionistische Logik" für irrig gehalten hätte, braucht kaum erwähnt zu werden -- stellt sie doch in ihren Hauptthesen beinahe eine Anti-Fregesche Logik dar.
- 15) Für die Einfachheit (die nicht mit dem oben erwähnten semantischen Begriff der Einfachheit der Bedeutung) stellte Frege folgende Kriterien auf:

Zwar kann man jedes Zeichen, jedes Wort als aus Teilen bestehend ansehen; aber nur dann sprechen wir ihm die Einfachheit ab, wenn nach den allgemeinen Regeln der Grammatik oder der Zeichengebung aus den Bedeutungen der Teile die Bedeutung des Ganzen folgen würde, und wenn diese Teile auch in anderen Verbindungen vorkommen und als selbständige Zeichen mit eigener Bedeutung behandelt werden. In diesem Sinne also kann man sagen: Der erklärte Ausdruck - das erklärte Zeichen - muß einfach sein. Sonst könnte es vorkommen, daß die Teile auch einzeln erklärt würden und daß diese Erklärungen der des Ganzen widersprechen würden.
(GGs II, s. 79).

- 16) Freges Kritik an Hilberts Vorgehen war viel tiefer und weitreichender als allgemein bekannt ist. Vor allem in den Aufsätzen UGG2 I, II und III, die zu den wichtigsten seiner sonst selten unwichtigen Werke gehören, führte er eine Analyse durch, deren Ergebnisse gerade den heute allgemein unter Logikern angenommenen Standpunkt darstellte: Die Axiome von Hilberts Axiomatik sind weder Axiome noch Definitionen im herkömmlichen Sinne; vielmehr sind sowohl sie wie auch die Lehrsätze überhaupt keine Sätze, sondern entweder Satzfunktionen

oder Teile von eigentlichen Sätzen (je nach der Auffassung der Variablen); die Beweise sind nicht Beweise, sondern Beweisschemata; von Sätzen kann erst überhaupt die Rede sein, wenn man Implikationen bildet, bestehend aus den Axiomen der Vorderglieder und Lehrsätzen als Nachglieder; diese eigentlichen Sätze bilden dann alle diejenigen Lehrsätze der (Prädikaten-)Logik, die bei geeigneter Einsetzung in Implikationen übergehen, deren Vorderglieder die Axiome des betreffenden Gebietes sind und deshalb abtrennbar sind.

17) Hermann Lotze, Logik; Leipzig 1880.

18) Allerdings dürfte dies nicht ganz so viel gewesen sein. Das logische Niveau von Lotzes Werk ist trotz unzweifelhaften guten Willens für modernere Begriffe unglaublich niedrig. Obgleich Frege nie so sehr in seinem Bann stand, wie andere seiner Schüler, sind doch einige Fäden wohl erkennbar - insbesondere die Gegnerschaft zum Psychologismus in der Logik und die Anhängerschaft zu der Theorie, die Arithmetik stammte aus der Logik.

19) op cit., s. 47.

Bibliographie

I. Veröffentlichte Arbeiten von FREGE:

1. Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grö-
ßenbegriffes gründen (Habilitationsschrift); Jena 1874.
2. Über eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als komplexe
Größe aufzufassen; Jenaesche Zeitschrift für Naturwissen-
schaften, Bd. 12, Supplementheft 1878.
- Bs 3. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete For-
melsprache des reinen Denkens; Halle, 1879.
4. Über Anwendungen der Begriffsschrift; Sitzungsbericht der
Jenaeschen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft;
Bd. 16, Supplementheft 1883.
- wBBs 5. Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift;
Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 81,
1882, s. 48 - 56.
- ZweckBs 6. Über den Zweck der Begriffsschrift; Jenaesche Zeitschrift
für Naturwissenschaft, Bd. 16, 1883, Supplementheft, s. 1-10.
- GLA 7. Die Grundlagen der Arithmetik; Breslau, 1884.
8. Über formale Theorien der Arithmetik; Jenaesche Zeitschrift
für Naturwissenschaft, Bd. 19, 1886, Supplementheft, s. 94-
104.
9. Über das Trägheitsgesetz; Zeitschrift für Philosophie und
philosophische Kritik, Bd. 98, 1891, s. 145-161.
- FuB 10. Funktion und Begriff; Jena 1891.
- SuB 11. Über Sinn und Bedeutung; Zeitschrift für Philosophie und
philosophische Kritik, Bd. 100, 1892, s. 25-50.
- BuG 12. Über Begriff und Gegenstand; Vierteljahresheft für wissen-
schaftliche Philosophie, Bd. 16, 1892, s. 192 - 205.
- uePSAL 13. Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vor-
lesungen über die Algebra der Logik; Archiv für systema-
tische Philosophie, Bd. 1, 1895, s. 433 - 456.
14. Rezension Husserls Philosophie der Arithmetik; Zeitschrift
für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 103,
s. 311 - 332.
- BsPeano 15. Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene;
Bericht der mathematisch-physikalischen Classe der König-
lichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 48,
1897, s. 53 - 59.
16. Über die Zahlen des Herrn Schubert; Jena 1899.
- GGs I, II 17. Grundgesetze der Arithmetik; 2 Bände, Jena 1893, 1903.
- UGG I, II 18. Über die Grundlagen der Geometrie; Jahresbericht der deut-
schen Mathematiker-vereinigung, Bd. 12, 1903, I, s. 319-324,
II, s. 368-375.

- UGG 2 I,
II, III
19. Über die Grundlagen der Geometrie; Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 15, 1906, I: s. 293 - 309, II: s. 377 - 403, III: s. 423 - 430.
 20. Was ist eine Funktion: Boltzmann Festschrift, Leipzig 1904, s. 656 - 666.
- AFThomae
21. Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 15, 1906, s. 586 - 590.
- UTFAN
22. Die Unmöglichkeit der Thomae'schen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen; Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 17, 1908, s. 52-55.
- Ged
23. Der Gedanke; Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, Bd. 1, 1918, s. 58 - 77.
- Ver
24. Die Verneinung; Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, Bd. 1, 1918, s. 143 - 157.
- GedGef
25. Gedankengefüge; Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, Bd. 3, 1923, s. 36 - 51.
- II. Unveröffentlichte Werke FREGEs, die zitiert werden (die Seitenzahl richtet sich immer jeweils nach der Seitennummerierung der Abschriften in Münster):
- BIFBs
26. Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift.
- BrLBs
27. Booles rechnende Logik und meine Begriffsschrift.
- AüSuB
28. Ausführungen über Sinn und Bedeutung.
- ÜLM
29. Über Logik in der Mathematik.
- FragAll
30. Fragment einer Abhandlung über die logische Allgemeinheit.

III. Briefwechsel Frege's, aus denen zitiert werden:

- Bw Russell
31. Briefwechsel mit Bertrand Russell.
- BwHilbert
32. Briefwechsel mit David Hilbert.
- BwHusserl
33. Briefwechsel mit Edmund Husserl.
- BwJourdain
34. Briefwechsel mit Philip E. B. Jourdain.
- BwJBem
35. bezeichnet eine Anlage aus einem nicht mehr vorhandenen Brief an Jourdain.

Alphabetisches Abkürzungsverzeichnis

AFThomae	21	FuB	10
AuSuB	28	Ged	23
BlFBs	26	GedGef	25
BrLBs	27	GlA	7
Bs	3	GGs	17
BsPeano	15	SuB	11
BuG	12	uePSAL	13
BwHilbert	32	uLM	29
BwHusserl	33	UGG1	18
BwJBern	35	UGG2	19
BwJourdain	34	UTfAN	22
BwRussell	31	Ver	24
FragAll	30	wBBs	5
		ZweckBs	6

Lebenslauf

Am 3. 1. 1929 in Butler, Pennsylvania in den Vereinigten Staaten als Sohn des Howard William Bartlett und seiner Ehefrau Loretto E., geb. Hannon geboren, absolvierte ich die Schule in Winter-Haven, Florida, im Jahre 1946. Danach studierte ich Logistik, Philosophie, Altphilologie, Slawistik und Mathematik an den Universitäten St. Bonaventure College, St. Charles College und an der Florida State Universität, wo ich im Jahre 1950 den Baccalaureus Artium erwarb. Ferner hörte ich an der Syracuse Universität, sowie an der Universität zu Wien und an der Ludwig-Maximilians-Universität zu München.

An deutschsprachigen Universitäten hörte ich insbesondere Logistik bei Professor W. Britzelmayr, Philosophie bei den Professoren W. Stegmüller, H. Kuhn, M. Müller, A. Wenzl und R. Guardini, Psychologie bei den Professoren Ph. Lersch und A. Vetter, und Mathematik bei den Professoren H. Richter, G. Aumann und K. Seebach. Meine Dissertation "Funktion und Gegenstand - Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege" entstand unter der Leitung von Herrn Professor Dr. W. Britzelmayr.

ERRATA

- s. 13: Zeile 26, statt "von und je –" "von A und B je –".
- s. 45: letzte Zeile, statt "GUS" lies "GGS".
- s. 57: bei allen Formeln außer der Letzten in der drittletzten Zeile soll der spiritus lenis über dem Buchstaben epsilon nach rechts abgebogen werden, im letzten aber nach links.
- s. 67: Zeile 10, statt "GGS XX 1" lies "GGS I".
- s. 81: Zeile 12 von unten, statt "BrBBs" lies "BrLBs".
- s. 89: Zeile 3 von unten, statt "UGG I, II" lies "UGGI I, II".

Die Abkürzung "WiF" bezeichnet Werk Nr. 20, Was ist eine Funktion?, in der Bibliographie.

